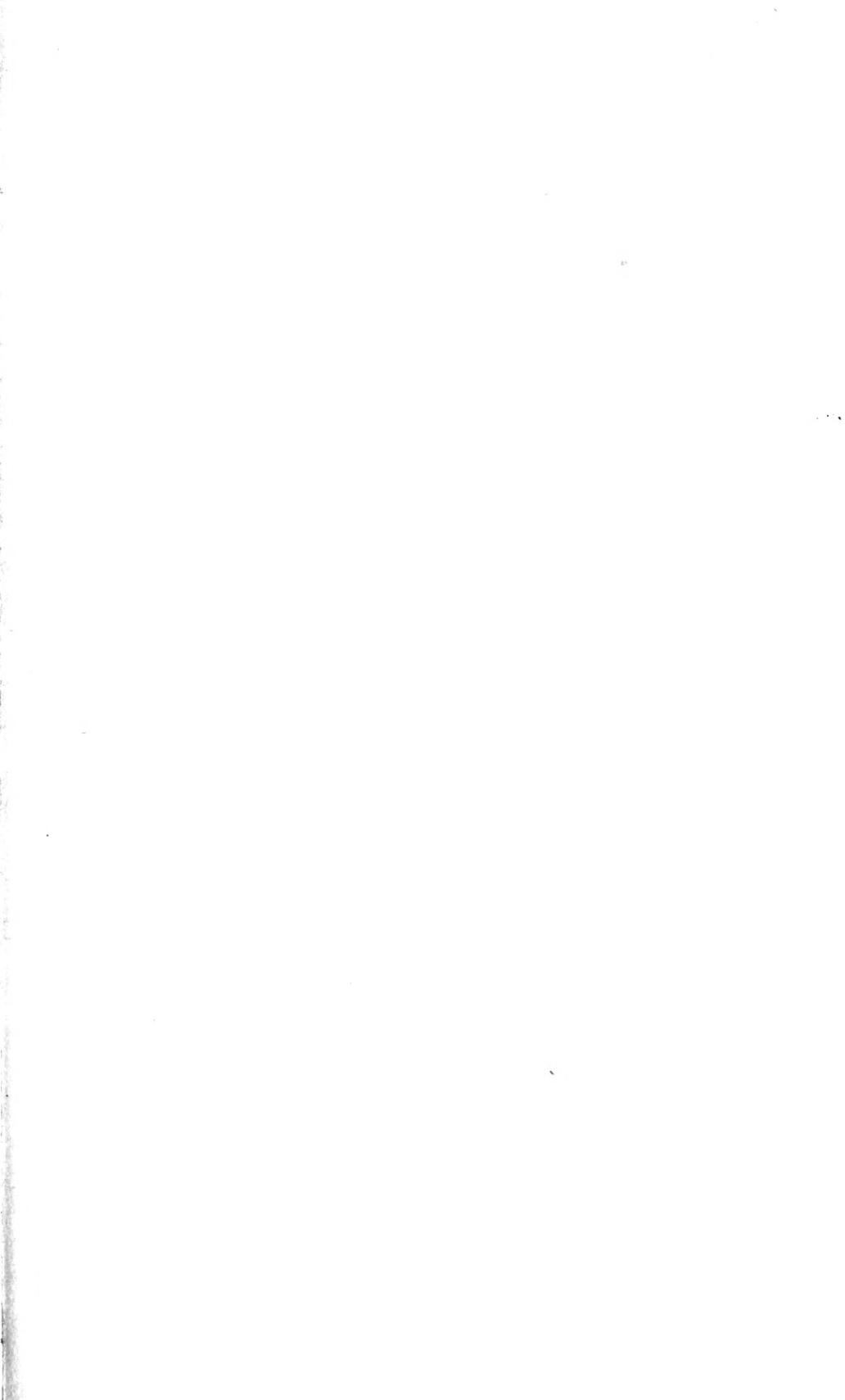


UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01180632 0





10 (90)

I

NEWTONI PRINCIPIA.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER

EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA,

MATHESEOS PROFESSORUM.

EDITIO NOVA,

SUMMA CURA RECENSITA.

VOLUMEN PRIMUM.

GLASGUÆ:

EX PRELO ACADEMICO,

TYPIS ANDRÆ ET JOANNIS M. DUNCAN.

VE NEUNT APUD LACKINGTON & SOC., R. PRIESTLEY, G. & W. B. WHITTAKER,
J. CUTHEL, G. COWIE & SOC., J. COLLINGWOOD, TREUTTEL & WÜRTZ, ET
TREUTTEL, JUN. & RICHTER, LONDINI; NECNON PARISIIS, ET ARGENTORATI
APUD TREUTTEL & WÜRTZ.

1822.

QH

803

A2

1822

V. 1

~~10445~~
4/12/90 4 vols.

LECTORI

S.

TYPOGRAPHI.



NEWTONI illustrissimi opus hoc in primis laudandum, cujus exemplaria sunt rarissima, et impenso pretio parantur, nunc formâ commodiore tibi in manum tradimus. Quid in hac editione expectandum, paucis te monitum velimus.

Erat nobis in animo illam LE SEUR et JACQUIER, Societatis Iesu Sociorum, cum eorum commentario perpetuo, in omnibus integram edere, nisi revera ubi macula forsân hic illic furtim irrepsisset. Quidquid penes nos fuit, præstitimus. Editiones Genevæ an. 1739-42 et Coloniae Allobrogum 1760 evulgatas, inter sese fideliter collatas, curaverimus, ut discrepantiæ in lucem eductæ omnes perlustrarentur, quæ errores haud paucos foras extrusimus. Denique ut nihil deesset, quin librum singulis consummatum faceremus, studio permissus erat viri matheseos plane periti Joannis M. Wright, Academiae Cantabrigiensis alumni, qui, schedis omnibus diligentius perlectis, maculas quidem cumulatim (teste ipsius autographo) quæ in editionibus prioribus latuissent, ejecit. Quâ de causâ nobis spes maxima editionem nostram præ omnibus eligendam, tum cæteris multo emendatiorem, tum arte typographicâ longè adornatiorem. At si non in omni parte sit perfecta, in memoriam revoca, Lector benevole, quam difficile est, fortasse ultra hominis sortem, hujusmodi studiorum statum optimum, quantumvis exoptatum, attingere aut accedere.

Ex Æd. Acad. Glasg. }
Ipsis Nonis Junii 1822. }

sola doctissimi authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in Newtoni propositionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cum præstantissima illa summi viri principia non solum intelligere, sed et illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimum delectationis habeat et utilitatis, dispersa huc et illuc generalia quædam problemata lector reperiet. Hæc sunt quæ facere volumus, quo exitu, penes benevolum lectorem esto iudicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis mathematicis nec imperito philosophorum vulgo nos scribere profitemur; ad hujusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, et tali insuper polent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi et animo comprehendere possint.

De nostris commentariis hæc satis dicta sint. Verum naturalis æquitas et mathematicus candor postulant, ut nos plurimum debere fateamur doctissimis viris, Davidi Gregorio, Varignonio, Jacobo Hermannò, Joanni Keillio, aliisque multis, qui varias Newtonianæ Philosophiæ partes luculentis scriptis illustrarunt. Eadem æquitatis atque ingenuitatis lege a nobis religiosè factum est, ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus, in commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus clariss. D^{no}. J. L. Calandrino in Academia Genevensi Professore in rebus mathematicis versatissimo, qui hanc nostram Newtoni Principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata Londini prodiiit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solum ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus sectionum conicarum elementa composuit, et quæ a nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum cultores.

*ROMÆ in Regio Conventu SS^æ. Trinitatis,
Anno 1739.*

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI

▲

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI.

TRACTATUM HUNC

D. D. D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

AD

LECTOREM.



CUM veteres Mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; et recentiores, missis formis substantialibus et qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: visum est in hoc tractatu mathesim excolere, quatenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, et practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut mechanica omnis a geometriâ ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, et si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam et linearum rectarum et circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas et circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica, et nihil aliud est quam mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi accuratè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo

referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, et virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ a veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistantiam fluidorum et ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo et secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem et planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ et maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitæ vel in se mutuò impelluntur et secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur et recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbeant.

In his edendis, vir acutissimus et in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit et schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrededer. Quippe cum demonstratam a me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus et benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpisssem, quæ ad leges et mensuras gravitatis et aliarum virium, et figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis descri-

bendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistantibus, ad vires, densitates et motus mediorum, ad orbes cometarum et similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer et unâ in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, et sigillatim demonstrare tenerer, et seriem reliquarum propositionum interrompere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quam numerum propositionum et citationes mutare. Ut omnia candidè legantur et defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benignè suppleantur, enixè rogo.

*Dabam Cantabrigiæ, e Collegio S. Trinitatis,
Maii 8. 1686.*

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, et nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvî possint, facilior redditur et amplior. In Libri Secundi Sectione VII. theoria resistantiæ fluidorum accuratiùs investigatur, et novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio theoria lunæ et præcessio æquinocetiorum ex principiis suis plenius deducuntur, et theoria cometarum pluribus et accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini, Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.



NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas et occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab Aristotele et Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiae laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertosque situs et motus; quin et fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omni-

potente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesis; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ et syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendam censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem e theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille et solus ex apparentiis demonstrare potuit, et speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, et certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse iudicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium a simplicissimis et proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cœlestia, longissimè a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; et oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in

corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam et utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, et partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam et utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitativis materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo Boyliano temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublatâ scilicet aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in terram et terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo et componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolvantibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur, et certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendent. Cùm igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur a tangentibus rectilineis et in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitalium centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; a quâcunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin et hæc quoque concedenda sunt, et mathematicè demonstrantur. Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, et quadratura temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, et quiescant orbitalium apsides; vires centripetas revolventium fore reciproçè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciproçè ut quadrata distantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, et lunæ præsertim, apsides non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm a duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse et planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicatâ proportionem, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem et secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciproçè.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in acces-

su ad centrum, diminui in recessu ab eodem : et augeri quidem in eadem proportionē qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportionē quā distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas et vim gravitatis, annon ejusdem fortē sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc et inde leges eādem, eādemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus : hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs a luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tum lunæ tempore periodico, tum distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quamadmodum docuit Hugenius. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superiùs ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem, si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celerius in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quā luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur et in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram : quin et actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat ; id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu et æquinoctiorum præcessionē, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc et illud

tandem edocemur, quâ nimirum lege vis gravitatis decrescat in majoribus a tellure distantibus. Nam cum gravitas non diversa sit a vi centripeta lunari, hæc verò sit reciproce proportionalis quadrato distantiae; diminuetur et gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem et secundariorum circa jovem et saturnum sunt phaenomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versum centrum solis, secundariorum versum centra jovis et saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versum terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centrīs, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiae a terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, et terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, et primarii vicissim in secundarios; sic et omnes primarii in solem, et sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat et universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem unâ cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, et sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, et sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissime colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, et nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam et per observationes certissime demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, et radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phaenomenis manifestum est et mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in datis distantibus et in eodem ferè plano collocata,

sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus et in diversissimis distantiiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantiâ. Inde verò sequitur, planetas et cometas universos se mutuò trahere, et in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis et saturni, astronomis non incognita, et ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin et ex motu illo lentissimo apsidum, qui suprâ memoratus est, quique a causâ consimili proficiscitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum sit, et terram et solem et corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprâ de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiiis, erunt et harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur axiomati, quod a nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas et easdem esse proprietates quæ nondùm cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensus lapidis in Europa, quin eadem sit causa descensus in America? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem et terram in Europa; quis negabit mutuam esse in America? Si vis attractiva lapidis et terræ componatur, in Europa, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in America? Si attractio terræ ad omnia corporum genera et ad omnes distantias propagetur in Europa; quidni pariter propagari dicamus in America? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes et experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia et impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt et mobilia et impenetrabilia:

et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, et impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, et de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas a philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est et ficta existentia nondum verò comprobata. Gravitatis ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ et sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est et nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, et exulare jubebis? Simul verò exulabunt et ab his proximè pendentes et quæ ab illis porrò pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit et probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni

diluendæ, quæ et ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon et hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum Cartesii dogmatibus pugnare et vix conciliari posse videatur. His suâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. Newtonianam itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, et ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam a phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, et veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit et meritò deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse

vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem et clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum et cometarum circa solem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata et vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, et eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiae. Constat verò planetas et cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione et velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, et sese mutuò penetrare motibusque diversis revoli ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, et peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiae occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi et difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus planetarum et cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectui suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes et cometas circumcingi atmosphaeris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphaeras, ex naturâ suâ, circa solem moveri et sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos et cometas circa solem deferri ab atmosphaeris suis credendum esse statuatur, et ob reptas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis au-

tem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem et alteram fabulam rejiciet : nam ovum non est ovo similis, quàm hypothesis atmosphærarum hypothese vorticum.

Docuit Galilæus, lapidis projecti et in parabola moti deflectionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis et plerumque contrariis motibus ferri, et lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, et vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat, et cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet et motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducuntis? Quis verò non subsannabit bonum illum Galilæum, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbis sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, et planetarum regiones liberrimè pertranseunt, et sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: et per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprâ dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrâ orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint, in ratione

sesquuplicata distantiarum a sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendant minus densæ, et locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: et ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa et multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrâ telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiae pro mole materiae, quæ non minor erit quàm densitas et vis inertiae telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, et valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incur-sare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiae. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiae fluidae, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; et sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè tenacia fuerint ad instar olei et mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, et hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; et minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregia resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, et per experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, et communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a fluido ad partes corporis posticas recurrente re-

stituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticæ, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistantia, quæ oritur ab eorundem densitate et vi inertię. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertię, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertię: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat et philosopho prorsus indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum huiusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante et implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse huius ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper et ubique extitisse, infinitam esse et æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet

igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum et motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis et gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges : in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi et interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis et vera philosophia fundatur in phænomenis rerum : quæ si nos vel invitos et reluctantes ad huiusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum et dominium summum sapientissimi et potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsitan hominibus minus grata sunt futura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent : verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos et æquos iudices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis et observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, et ad ea porrò pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, meritò admirantur et suspiciunt quicumque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit et penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex Alphonsus vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, et dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensiùs colere et venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis et sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam et bonitatem : insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni Opus adversus atheorum impeus mun-
 titissimum præsidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra,
 contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, et in pere-
 ruditis concionibus Anglicè Latinèque editis, primus egregiè demonstra-
 vit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fau-
 tor eximius Richardus Bentleius, seculi sui et Academiae nostræ magnum
 ornamentum, Collegii nostri S. Trinitatis magister dignissimus et integer-
 rimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic et
 tuas quæ debentur gratias, lector benevolè, non denegabis. Is enim, cum
 a longo tempore celeberrimi auctoris amicitia intimâ frueretur, (qua etiam
 apud posteros censi non minoris aestimat, quàm propriis scriptis quæ li-
 terato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ et scientiarum
 incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima
 admodum et immani pretio coëmenda superessent; suasit ille crebris ef-
 flagitationibus, et tantum non objurgando perpulit denique virum præ-
 stantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut
 novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò et egregiis insu-
 per accessionibus ditatam, suis sumptibus et auspiciis prodire pateretur:
 mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam pos-
 set emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ, Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES,

*Collegii S. Trinitatis Socius, Astronomiæ et Philosophiæ
 Experimentalis Professor Plumianus.*

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.



IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton, M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in Libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, et adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In Libro tertio argumentum quo Lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: et novæ adduntur observationes de proportionem diametrorum Jovis ad invicem a D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, a D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, et quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum signa, non minùs accuratè cursum peregissee, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, a D. Bradleio Astronomiæ apud Oxonienses Professore computatus adjicitur.

Dabam Londini, Jan. 12. 1725-6.

IS. NEWTON.

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM,
SECVLI GENTISQVE NOSTRÆ
DECUS EGREGIUM.

~~~~~

EN tibi norma poli, et divæ libramina molis,  
Computus en Jovis; et quas, dum primordia rerum  
Pangeret, omniparens leges violare Creator  
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.  
Intima panduntur victi penetralia cœli,  
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.  
Sol solio residens ad se jubet omnia pronò  
Tendere descensu, nec recto tramite currus  
Sidereos patitur vastum per inane moveri;  
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.  
Jam patet horrificis quæ sit via flexa cometis;  
Jam non miramur barbati phænomena astri.  
Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe  
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli  
Hactenus astronomo numerorum fræna recuset:  
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.  
Discimus et quantis refluxum vaga Cynthia pontum  
Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam  
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;  
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.

Quæ toties animos veterum torsere sophorum,  
 Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,  
 Obvia conspiciamus, nubem pellente mathesi.  
 Jam dubios nullâ caligine prægravat error,  
 Queis superûm penetrare domos atque ardua cœli  
 Scandere sublimis genii concessit acumen.

Surgite, mortales, terrenas mittite curas;  
 Atque hinc cœligenæ vires dignoscite mentis,  
 A pecudum vitâ longè latèque remotæ.  
 Qui scriptis jussit tabulis compescere cædes,  
 Furta et adulteria, et perjuræ crimina fraudis;  
 Quive vagis populis circumdare mœnibus urbes  
 Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;  
 Vel qui curarum lenimen pressit ab uvâ;  
 Vel qui Niliacâ monstravit arundine pictos  
 Consociare sonos, oculisque exponere voces;  
 Humanam sortem minus extulit: utpote pauca  
 Respiciens miseræ tantum solamina vitæ.  
 Jam vero superis convivæ admittimur, alti  
 Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ  
 Clastra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,  
 Et quæ præteriti latuerunt secula mundi.

Talia monstrantem mecum celebrate camœnis,  
 Vos O cœlicolum gaudentes nectare vesci,  
 Newtonum clausi reserantem scrinia veri,  
 Newtonum Musis charum, cui pectore puro  
 Phœbus adest, totoque incessit numine mentem:  
 Nec fas est propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

# INDEX CAPITUM

## VOLUMINIS PRIMI.

|                                                                                                                                              |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                                                              | Pag. |
| <i>Definitiones</i> .....                                                                                                                    | 1    |
| <i>Axiomata, sive Leges Motus</i> .....                                                                                                      | 15   |
| DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.                                                                                                               |      |
| SECT. I. <i>De methodo rationum primarum et ultimarum</i> .....                                                                              | 45   |
| SECT. II. <i>De inventione virium centripetarum</i> .....                                                                                    | 65   |
| SECT. III. <i>De motu corporum in conicis sectionibus excentricis</i> .....                                                                  | 118  |
| SECT. IV. <i>De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum et hyperbolicorum ex umbilico dato</i> .....                                   | 135  |
| SECT. V. <i>De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur</i> .....                                                                        | 146  |
| SECT. VI. <i>De inventione motuum in orbibus datis</i> .....                                                                                 | 201  |
| SECT. VII. <i>De corporum ascensu et descensu rectilineo</i> .....                                                                           | 226  |
| SECT. VIII. <i>De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur</i> .....                         | 241  |
| SECT. IX. <i>De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum</i> .....                                                             | 258  |
| SECT. X. <i>De motu corporum in superficiebus datis, deque funependulorum motu reciproco</i> .....                                           | 278  |
| SECT. XI. <i>De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium</i>                                                                     | 311  |
| SECT. XII. <i>De corporum sphaericorum viribus attractivis</i> .....                                                                         | 357  |
| SECT. XIII. <i>De corporum non sphaericorum viribus attractivis</i> .....                                                                    | 388  |
| SECT. XIV. <i>De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur</i> ..... | 412  |





# PHILOSOPHIÆ

## NATURALIS

### PRINCIPIA MATHEMATICA.

#### DEFINITIONES.

##### DEFINITIO I. (a)

*Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate et Magnitudine conjunctim.*

AER, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omni-

*Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ viz aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterum sæpiùs recurrent Mechanicæ principia interscrere non abs re erit, tum ut Lectorum labori parcamus, tum ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.*

(a) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, a corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porro inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia libere pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, et ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta

foramina, Massa et volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; et eâdem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciproca. Itaque si densitas dicatur  $D$ ; massa  $M$ , volumen  $V$ ; erit  $D = M : V$ ; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque  $D$  et  $M : V$ , per  $V$  multiplicentur, erit  $DV = M$ , seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumine ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si  $D$   $V$  et  $M$ , per  $D$  dividantur, erit  $V = M : D$ , seu volumen est ut massa ad densitatem applicata,

um, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam <sup>(b)</sup> Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

## DEFINITIO II. (c)

*Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et Quantitate Materiæ conjunctim.*

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplex est, et duplâ cum velocitate quadruplus.

sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ et inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si  $m : v = M : V$ , patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facillè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur et fit quadrupla.

(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hic breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimum constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, et in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadoendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solum exterioribus corporis partibus, sed et interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt et vice versâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

(c) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu considerata sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, et tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motus est linea recta quam mobile describit aut

describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ et ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æqualis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æqualiter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquali quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æqualis permaneret. Porro manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; et contrâ, celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; et manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut temporâ, quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiarum et reciproâ temporum; seu si celeritas dicatur  $C$ , spatium  $S$ , tempus  $T$ ; erit  $C$  ut  $S : T$ , sive  $C = S : T$ , seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, et multiplicando utrinque per  $T$ , erit  $C T = S$ , seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, et dividendo utrinque per  $C$ , erit  $T = S : C$ , seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates  $C, c$ , seu  $S : T$ ;  $s : t$ , fuerint æquales, id est  $S : T = s : t$ , erit  $S : s = T : t$ , seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus,

## DEFINITIO III. (4)

*Materiae vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiae fit, ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam factâ; estque exercitium illud sub diverso respectu et Resistentia et Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus et impetum moventibus tribu-

spatium percursum et tempus considerentur, et ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ et celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus, &c. Siquidem manentibus tempore et massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, et motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percurta sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritate ducta, seu in ratione compositâ massæ et celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod itâ exponimus  $Q = M C$ , dividendo utrinque per M, et deinde per C, erit  $C = Q : M$ ; et  $M = Q : C$ ; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, et massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu M C, m c, fuerint æquales, erit  $M C = m c$ , et  $M : m = c : C$ , seu massæ sunt reciproce ut celeritates; et viceversâ si  $M : m = c : C$ , erit  $M C = m c$ , seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciproca, quantitates motûs sunt æquales. Præterea cum (5), sit  $C = S : T$ , erit etiam  $Q = M S : T$ , seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ et spatii et inversâ temporis; invenietur etiam  $Q T = M S$ ,  $M = Q T : S$ ,  $S = Q T : M$ ,  $T = M S : Q$ .

Pari facilitate demonstrari possunt cætera the-

oremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa et passiva; Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel anitiendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, et in vim mortuam quæ est tantum conatus seu sollicitatio ad motum, et ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiu in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumptatur, vel planum sustentans auferatur, tûm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, et quâ proinde conatur a centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiae vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem statûs, id est, motûs vel quietis inducere conanti resistit. Etenim nulla potest esse actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens et patiens, dum alterum alteri resistit; aliqui corpus motum posset sine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertie eadem est in corporibus motis et quiescentibus; tam enim resistunt corpora actioni quâ a quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ a motu ad quietem reducantur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum et ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertie eadem in omnibus æqualibus materiae partibus reperitur, consequens est ut sit materiae proportionalis; dupla in massâ duplicatâ, tripla in tri-

it: sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

#### DEFINITIO IV. (e)

*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movandi uniformiter in directum.*

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiae. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ.

#### DEFINITIO V.

*Vis Centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcumque tendunt.*

Hujus generis est Gravitatis, quâ corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; et Vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, a circumagente manu abire conatur; et conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; et quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit et in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; et nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur et in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistantia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo et in terram perpetuò flectitur, idque magis vel minus pro gravitate suâ et velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviaabit a cursu rectili-

plicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis resistunt quam minoribus, estque resistentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit sine causâ; undè omne corpus ut potè iners et passivum (8) in suo quocumque statu perseverat, nisi causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum mutare cogatur; cùm igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impressa seu actio mutat quidem corporis statum, sed cessante illius vis actione, corpus in novo statu per

illam actionem recepto perseverat solâ vi inertie passivâ, quâ fit ut sine novâ vi externâ statum suum mutare nullâ ratione possit; adeoque si semel movetur, sibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, seu secundum directionem quâ impulsus fuerit et quâ movebatur, dum actio vis externæ cessavit.

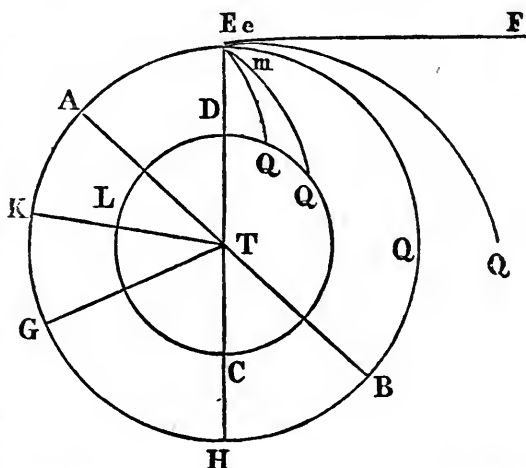
(f) 10. Cùm linea quævis curva considerari possit tanquam polygonum, ex infinitis numero,

neo et longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quasi duplo longius pergeret, et decuplâ cum velocitate quasi decuplo longius: si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, et minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circumiret, vel denique ut in cœlos abiret et motu abundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset et terram totam circumire, potest et Luna vel vi gravitatis, si modò gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, et in orbem suum flecti: et sine tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe ut sit justæ magnitudinis: et Mathematicorum est invenire

atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus rectis compositum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in singulis curvæ punctis E fertur juxta directionem lateris evanescentis E e, adeoque si sibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, et in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proinde cum lineâ E e producta, sit ipsa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, nisi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio est versùs curvam, ipsum a motu rectilineo retraheret et in orbitâ suâ retineret, quo major est vis aut celeritas secundùm directionem tangentis vel evanescentis lateris, E e, et minor vis illa quâ mobile a tangente in curvam retrahitur,

eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propius accedit. Econtrâ decrescente vi aut celeritate secundùm directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, et major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundùm directionem tangentis, et deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari sin-



gamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundùm directionem radiorum, E T. A T, ad centrum T urgeantur, et ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxta directionem rectæ E F ad E T normalis; corpus illud hæc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur et cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propius accedit, adeò ut corpus variis et successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper

vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; et vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix, et motrix.

### DEFINITIO VI. (ε)

*Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

### DEFINITIO VII. (h)

*Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantibus a globo terræ; in æqualibus autem distantibus eadem undique, propterea

attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripetâ requiritur; et viceversâ datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, et vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; et mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F et curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centripetam, quâ a tangente retrahitur et in orbitâ suâ retinetur, et reciprocè ex datâ velocitate per tangentem et vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ sagacitate et elegantia perfecit.

(ε) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxta directionem radiorum, T A, T E, T H, agat; in 1<sup>o</sup>. casu vis illa centripetâ, in 2<sup>o</sup>. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, et cui vis inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, et vis sit singulis elementis aqualis ejusdemque constanter intensio; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eadem corporis centralis massâ, vis semper manens aqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis

centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ et vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ et intensiois vis in singulis elementis aqualibus.

(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcunque a centro distantia consideretur, possumus in variis illis a centro distantibus superficies sphaericas fingere quarum commune centrum sit T, et vis centralis in illis distantibus seu superficiebus sphaericis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis a centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas a vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producat, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas et tempus variant, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ et reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit  $G = C : T$ , et  $G T = C$ , et  $T = C : G$ . Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascentis seu

quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII. <sup>(1)</sup>

*Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.*

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; et in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, et (ut ita dicam) pondus; et innotescit semper per vim ipsi contrariam et æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, et absolutas; et distinctionis gratia referre ad corpora, centrum petentia, ad corporum loca, et ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; et vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod cen-

initio motûs tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum a centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeoque radii qui in distantia  $T L$ , per hemisphærium a semicirculo  $D L C$  descriptum diffundebantur, in distantia  $T K$ , per hemisphærium  $E K H$  propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, et radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum a semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hic enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verum cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficialium in quavis a centro distantia descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro; ergo et vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum a centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit mediâ resistentiam; quare ut in physicis valeat, mediâ resistentia in computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum e centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis ra-

diis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

<sup>(1)</sup> 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeoque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita (13), ergo vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur  $G$ ; massa,  $M$ , vis motrix,  $p$ , erit  $p$ , ut,  $M G$ , et  $M$ , ut  $p : G$ , et  $G$ , ut  $p : M$ , seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, et vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices  $P$  et  $p$ , seu  $M G$ , et  $m g$ , æquales, erit  $M : m = g : G$ , seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciprocè; et viceversa, si  $M : m = g : G$ , erit  $m g = M G$ , seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porro cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricum celeritates illæ substitui possunt.

trale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas et sedes Physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate et ex quantitate materiæ, et vis motrix ex vi acceleratrice et ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices et motrices nomen. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter et pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

### *Scholium.*

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum et Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas et relativas, veras et apparentes, mathematicas et vulgares distinguere.

(<sup>k</sup>) I. Tempus Absolutum, verum, et mathematicum, in se et naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, et vulgare est sensibilis et externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad cor-

(<sup>k</sup>) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolutum mathematicè considerare possumus, tanquam æquabilem unius instantis seu puncti temporis



pora definitur, et à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërei vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum et relativum, specie et magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aëris nostri, quod relativè et respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aër transit, nunc alia pars ejus; et sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, et propterea internus et in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: et Quies relativa est permansio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permansio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unâ cum cavitate suâ et contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè et absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus et absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: et si corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; et velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè et absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, et relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili poris punctum flueret, spatiaque ab eo descripta celeritate moveretur, illud eodem modo ac tem- forent temporibus proportionalia (5); eo igitur

(1) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ per *Æquationem* temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari et retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, et ex iisdem colligitur per *Æquationem* Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, et movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora et spatia sunt sui ipsorum et rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: et loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; et solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, et ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim et distantiiis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam et omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum et motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies et Motus absoluti et relativi ab invicem per Proprietates suas et Causas et Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verùm corporum cœlestium et horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicut mensuræ illæ vulgares non sunt temporis absoluto proportionales.

(1) 17. *Æquatio* temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum et tempus relativum, (h.

e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ proindè temporis relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum et vice versâ.

(<sup>m</sup>) 18. Gyranrium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeoque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motus recedere nituntur; ut si trochus vel sphaera circa axem rotatur, singulæ illorum corporum

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes <sup>(m)</sup> omnes conantur recedere ab axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; et sublata illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur unâ locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. <sup>(n)</sup> Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum: et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari et mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

partes circulos describunt, et ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motus posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

<sup>(n)</sup> 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis et nautæ conspirent, integra et absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu ma-

ris, seu respectu loci secundi, et ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti et nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio et velocitas in duas alias directiones et velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum com-

ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus, quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. <sup>(o)</sup> Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, et unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitanè agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; <sup>(p)</sup> superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvī incipiat; recedet ipsa paulatim a medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatore semper motu ascendet magis et magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, et per talem conatum innotescit et mensuratur motus aquæ circularis verus et absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, et propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, et propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio et adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; et relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum et unicum motum participant. Unde et in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvī vo-

muni directione conspiret, alia verò sit ipsi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrâ demonstrandis, facillimè invenietur tum absoluta navæ celeritas, tum illius vera directio.

<sup>(o)</sup> 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu dumtaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

<sup>(p)</sup> 21. Cum aqua vi inertie <sup>(8)</sup> in eodem

quiescendi statu perseverare nitatur, in eam nonnisi gradatim et per repetitam laterum situlæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motus situlæ, tota aquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ <sup>(20)</sup> sicut antè motum situlæ, plana et quieta manet. Sed cum iteratò laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam

lunt, et Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, et Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unâque cum cœlis delati participant eorum motus, et ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensurarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci et Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; et sermo erit insolens et purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intèlligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitativis mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin et Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus et vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, et ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ et effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, et inde quantitas motus circularis computari posset. (9) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, et inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, et faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset et quantitas et determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum et sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo cor-

transierit, singulæ partes aquæ (18) ab axe motus, seu a medio vasis conantur recedere, cùmque minorem sursùm in aëre resistentiam inveniant, ad latera situlæ accumuluntur et ascendant, et quò celerius aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motus per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porro cum inter vim centrifugam et celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat esse ac determinata pro-

portio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe cognosci ac mensurari potest velocitas motus circularis absoluta, ut deinceps demonstrabitur.

(9) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circa commune gravitatis

pora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (<sup>r</sup>), sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, et deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, et corpora quiescere; et tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, et apparentibus differentiis colligere, et contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas et effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

centrum, id est, circa punctum æquilibrii revolvitur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ filii tensione augmentum vel decrementum motus, &c.

(<sup>r</sup>) 25. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, et stellæ quiescant absolutè, sive e contrâ moveantur stellæ et terra quiescat, eadem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem no-

tissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenon petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet: ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant, seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

# AXIOMATA,

SIVE

## LEGES MOTUS.

---

### LEX I.

(\*) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

PROJECTILIA perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistantiâ aëris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistantibus factos conservant diutius.

### LEX II.

(†) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi gener-

(s) 24. Ex hac primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeoque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cum projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua bujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsum semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit mediî resistantiæ, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet

majora planetarum et cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis celestibus experiri resistantiam, cum motus suos diutissime conservent.

(†) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundum eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, et per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsus, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, et celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus

atrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiciantur additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, et cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

### (<sup>a</sup>) LEX III.

*Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur et hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam et equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem

generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decremента, et corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, et deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrâ directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu et reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo et redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cum pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu et reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat et extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublata mediis resistentiâ, motu uniformiter accelerato descendunt, et motu uniformiter retardato ascendant. . . . . Demonstratio . . . . Sublatâ mediis resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice et in radice montis permanet, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice et vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublata aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, et per lineas ad horizontem perpendiculares (5) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, et uniformiter retardato ascendant (25). Q. e. d.

27. Sublatâ mediis resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit, sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur . . . . Dem. . . . recta S K, representet spatium quod grave cadendo percurrit; T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; et C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; et T C : T B = C L : B D, adeoque recta, T D, transit per puncta L, et l, et triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ita accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet a celeritate C L, adeoque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas, C L, uniformis censi potest. Porro spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus, est ut rectangulum, C L × C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur, et similiter spatium S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S p; et eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T B, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum,

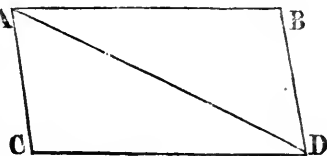


mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

### COROLLARIUM I.

*Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatim.*

Si corpus dato tempore, vi solâ M in A loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; et vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum A B D C, et vi



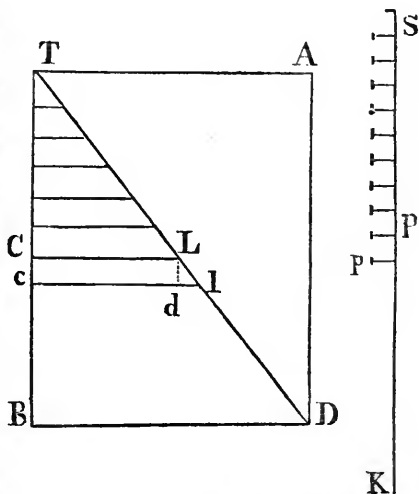
ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. d.

28. Coroll. 1. . . . Cum velocitates acquisitæ, sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percurra ut quadrata velocitatum, et tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2. . . . Si grave e quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurrat spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motûs computata sumantur in progressionem numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta, erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum, 1, 4, 9, 16, 25, &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percurra, erunt ut termini progressionis numerorum imparium, 1, 3, 5, 7, 9, &c. nam cum spatium 1<sup>o</sup> tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum, erit 4—1 seu 3, et ita de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt (25).

30. Coroll. 3. . . . spatium S K, quod grave e quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, et spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Coroll. 4. . . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita, est semper(5) ut



duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit  $G T = 2 S : T$  (13) adeoque  $G T^2 = 2 S$ , seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(a). 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertîa clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur

utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam (b) quoniam vis N agit secundum lineam A C ipsi B D parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D a vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam B D, sive vis N imprimatur, sive non; (c) atque ideo in fine illius temporis re-

ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente et patiente statûs mutationes; cùm enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horum corporum collisio (8), mutatio statûs æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit et contraria reactio, non idcirco tamen inter corpus agens et patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistantiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistantiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistantiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistantiâ mediæ et inertia quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

(b) 33. Quoniam vis N, agit secundum lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per Leg. 2.) nihil nisi velocitatem secundum lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proinde non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, a vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, et (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires M, et N, in mobile eodem modo simul agere ac si singule seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(c) 34. Idcirco cùm in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ C D, et B D, in utriusque lineæ concursu D reperitur, necesse est; quia autem initio et fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempe primum in A, et deinde in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, et D, datis, recta, A D, positione data est; et corpus quibuscumlibet viribus impulsu, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundum ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1. et 9.)

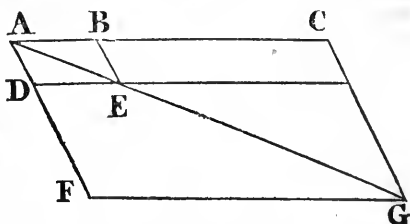
35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, AC, disjunctis non est æqualis, sed tantum æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem et per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, AC, eodem tempore percursa (5); est autem summa laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo summa quantitatuum motûs per latera, major est quanti-

tate motus per diagonalem. Verum quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile a pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio et velocitas ex omnibus separatis composita ipsisque æquipollens, quæ *media directio* dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. *Newt.*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, et cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unam reducentur.

37. Motus omnis in quocumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis; facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, AC, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eadem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circâ latus A B triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, et de aliis quibuscumque motibus dici debet.

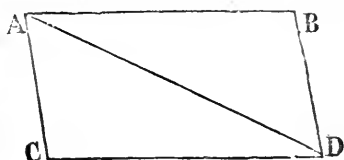
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, et per A F, ita urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, et A D, AC, et A F, iisdem temporibus percursa, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet....



*Dem.* ... Ductis DE ad A B, et BE ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utrâque lineâ D E, et E B, (34) adeoque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, et C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, et F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergo corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. d.

39. Si spatia secundum unam directionem

perietur alicubi in lineâ illâ B D. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ C D, et idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem 1<sup>am</sup>.



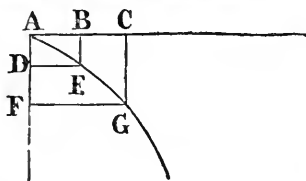
## COROLLARIUM II.

*Et hinc patet (d) compositio vis directæ A D ex viribus quibusvis obliquis A C et C D, et vicissim resolutio vis cujusvis directæ A D in obliquas quas-  
cunque A C et C D. Quæ quidem compositio et resolutio abundè confir-  
matur ex Mechanicâ.*

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales O M, O N filis M A, N P sustineant pondera A et P, et quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta K O L filis perpendi-  
culariter occurrens in K et L, centroque O et intervallorum O K, O L ma-

percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxta alteram directionem iisdem tempo-  
ribus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatio-  
rum viribus separatis iisdem temporibus des-  
criptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuò accelerato vel retardato componatur.

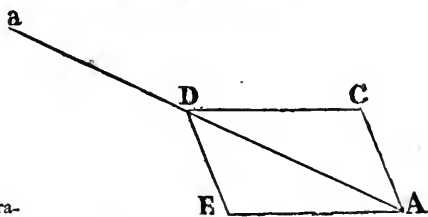
40. Corpus grave secundum quamlibet direc-  
tionem A C, quæ non sit ad horizontem norma-  
lis projectum, in terræ viciniis, sublata mediis  
resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus  
diameter A F, est ad horizontem perpendicularis,  
et tangens A C, directio projectionis....



*Dem ... Solâ vi projectionis impressâ, gra-  
ve uniformiter movetur per rectam A C, (per  
leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter ac-  
celerato per rectam A F, aut ipsi parallelam, de-  
scendit (26); quoniam verò motus per A C,  
æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tem-  
pora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F,  
motu uniformiter accelerato iisdem temporibus  
descripta, sunt ut quadrata temporum quibus de-  
scribuntur (27), seu ut quadrata rectarum A B,  
A C, aut ipsis parallelarum et æqualium D E,  
F G: cum igitur grave motu composito latum in  
fine temporum A B, A C, reperiat in punctis  
E, et G, (34) evidens est quadrata ordinarum*

D E, F G, curvæ A E G, (39) esse inter se in  
ratione abscissarum A D, A F, adeoque curvam  
A E G, esse parabolam, (per 20<sup>am</sup>. lib. 1 Conic.  
Apollon.) cujus diameter A F, et tangens A C  
ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1 Conic.  
Apollon.) Q. e. D.

(d) 41. Quæ de motuum compositione et re-  
solutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt  
transferri. Si corpus seu punctum D, viribus  
mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis  
D E, D C, juxta directiones D E, D C, agen-  
tibus trahatur vel impellatur, et completo paral-  
lelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires  
D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxta directio-  
nem D A, agentis æquivalent...



*Dem ... vis separata D C considerari po-  
test tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D,  
juxta directionem D C, continuò et uniformiter  
agit, et vis illa est ut celeritas quam dato tempo-  
re generat aut generare potest (15), adeoque illa  
celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea  
recta sit ut vis ipsa D C, (per hyp.) simili argu-  
mento liquet rectam E D, esse ut celeritatem vi  
agente per D E eodem tempore dato generandam.  
Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam,  
D A, æquipollentem componantur (per Coroll. 2.  
Newt.) manifestum est vires quoque laterales*



Libræ, vectis, et Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd si pondus  $p$  ponderi  $P$  æquale partim suspendatur filo  $Np$ , partim incumbat plano obliquo  $pG$ : agantur  $pH$ ,  $NH$ , prior horizonti, posterior plano  $pG$  perpendicularis: et si vis ponderis  $p$  deorsum tendens, exponatur per lineam  $pH$ , resolvi potest hæc in vires  $pN$ ,  $HN$ . Si filo  $pN$  perpendicularare esset planum aliquod  $pQ$ , secans planum alterum  $pG$  in linea ad horizontem parallela; et pondus  $p$  his planis  $pQ$ ,  $pG$  solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus  $pN$ ,  $HN$  perpendiculariter, nimirum planum  $pQ$  vi  $pN$ , et planum  $pG$  vi  $HN$ . Ideoque si tollatur planum  $pQ$ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi  $pN$ , quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis  $PN$ , ut  $pN$  ad  $pH$ . <sup>(h)</sup> Ideoque si pondus  $p$  sit ad pondus  $A$  in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum  $pN$ ,  $AM$  a centro rotæ, et ratione directâ  $pH$  ad  $pN$ ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem  $p$ , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: et inde vires cunei et mallei inno-

hitur, vis tota  $DA$ , resolvi potest (41) in vires laterales et æquipollentes  $AC$ , et  $DC$ , ita ut punctum  $D$ , urgeatur simul vi ut  $DC$ , secundum directionem  $DC$ , et vi ut  $CA$ , secundum directionem rectæ  $OD$ , productæ; quia verò centrum  $O$ , rotæ fixum supponitur, vis ut  $AC$ , trahendo punctum  $O$ , juxta directionem radii  $OD$ , nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circa centrum  $O$ , movendam; vis autem altera  $DC$ , trahendo radium  $DO$  perpendiculariter, idem valet ad rotam circa centrum  $O$ , volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium  $OL$ , ipsi  $OD$ , æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod  $P$ , e puncto  $L$ , suspensum sit vi  $DC$ , æquale, seu, quod idem est, si pondus  $P$ , sit ad pondus  $A$ , ut recta  $DC$ , ad rectam  $DA$ , quæ exponit vim absolutam ponderis  $A$ , rota his duabus viribus  $A$ , et  $P$ , in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis  $ADC$ ,  $DOK$ , anguli  $DAK$ , et  $KDO$ , ob parallelas  $AC$ ,  $DO$ , et præterea anguli ad  $K$  et  $C$  recti, æquales sunt, adeoque triangula illa sunt similia et  $DC:DA = OK:DO$ , seu  $OL$ ; pondera igitur  $A$ , et  $P$ , quæ sunt reciproce ut radii in directum positi  $OK$ , et  $OL$ , seu quæ sunt reciproce ut perpendiculares  $OK$ , et  $OL$ , ex centro  $O$ , in eorum directiones ductæ idem pollebunt, et sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit  $KL$ , recta inflexilis et gravitatis expers circa punctum fixum seu fulcrum  $O$ ,

volubilis, hæc vectem et libram exhibet atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior  $OL$ , et centrum  $O$ , circa quod rota et cylindrus cujus est radius brevior  $OK$ , revolvipossunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrio, cum potentia seu pondera  $A$ , et  $P$ , sunt inter se reciproce, ut rectæ a centro  $O$ , ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantia  $OL$ , vis ponderis  $P$ , ad movendam rotam, est ut pondus  $P$  absolutum, et manente pondere  $P$ , crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantia directionis ponderis a centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantia, pondus idem  $P$ , est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis a centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentia seu ponderis ad movendam machinam circa centrū motus, est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentia, et distantia directionis illius a centro motus. Vim autem illam ponderis aut potentia ad machinam movendam *momentum potentia* aut *ponderis* vocant *Mechanici*.

(h) 48. Vis quâ pondus  $p$ , tendit filum obliquum  $pN$ , dicatur  $\pi$ , et normalis ex centro  $O$ , in filum  $pN$ , ducta dicatur  $n$ , et erit ex demonstratis  $\pi:P$ , seu  $p = pN:pH$ . Præterea si vis  $\pi$ , in æquilibrio cum pondere  $A$  consistat, erit etiam (47)  $A:\pi = n:KO$



### COROLLARIUM III.

*Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.*

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem 111, adeoque per Legem 11 æquales in motibus efficiunt mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (\*)

*Newt.*) percurrent diagonalem  $CF$ ; et cum in parallelogrammis  $DB$ ,  $DE$ , omnia sint paria, erit  $FC = AC$ , et angulus  $FCE$ ,  $= ACE$ . Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas  $AD$ , seu  $CE$ , plano parallela, sed velocitas perpendicularis  $CH$ , minor erit velocitate  $DC$ , seu  $AB$ , et completo parallelogrammo  $HE$ , globus per diagonalem  $CG$ , resiliat.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum .... 10. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eadem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. *Newt.*) summa quantitatum motùs eadem antè et post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summà quantitatum motùs antè conflictum per summam massarum divisà (6) .... 20. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motùs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motùs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motùs globi debiliùs moti (50), et ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motùs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motùs antè conflictum æqualis (coroll. 3. *Newt.*) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motùs antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motùs post impactum (6), ex quâ et quantitate motùs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motùs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est, respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum .... 10. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam

ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutus produceret, (in corporibus imperfectè tantum elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elaterio destituerentur post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progredirentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi et directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, et in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elaterii restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus et *Lege* 2<sup>a</sup> constat quod erat primò propositum .... 20. Corpora perfectè elastica eadem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantum elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt, est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cùm in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuò accedebant, destruat ex ictu (52), sitque vis restitutiva elaterii perfecti vi compressivæ æqualis et contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantum restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis .... 30. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniat, considerentur corpora tanquam omni elaterio destituta, et in eâ hypothesi quærat (52) quantitas motùs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quâ corpus ante conflictum movebatur, eadem motus quantitas duplicata, erit quantitas motùs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motùs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motùs illius corporis post conflictum .... 40. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitui-

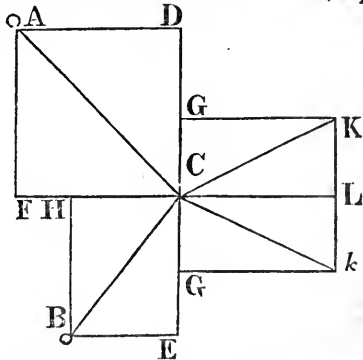
(l) Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; et B sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex et partium decem, et summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, adeoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, et B cum partibus septem vel sex vel quinque,

tivæ elaterii ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, et in eâ hypothesi quærat quantitas motus in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motus quantitati si addatur quantitas motus vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motus ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ et ex quantitate motus corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprâ. omnis quantitas motus illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(l) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duas velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut  $3 \times 2$ , seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motus globi B,  $1 \times 10$ , seu, 10, . . . 10. Si globi elastici non sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit  $16 : 4$ , seu 4; quare quantitas motus ipsius A, post conflictum erit  $3 \times 4$ , seu 12. B, verò quantitas motus erit  $1 \times 4$ , seu 4. Itaque quantitas motus a corpore B, amissa est, 6, et corpori A, acquisita est etiam, 6 . . . 20. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 et 12. Si quantitati motus 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motus illius post conflictum; si verò ex quantitate motus, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motus per conflictum amissam, residuum est—2, quod signum—, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hac motus quantitate 2 . . . 59. Si globi A et B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motus, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motus, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, et amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motus integra tam ex ictu quàm ex elaterio acquisita vel amissa; unde quantitas motus globi A, post conflictum est,  $6 + 9$ , seu, 15, globi B,  $10 - 9$ , seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitibus motuum quibuscumque corpora post conflictum pergunt, invenitur cujusque velocitas dividendo quantitatem motus cujusque corporis per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motus, sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motus antè conflictum ad quantitatem motus post conflictum, ita velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcumque A et B, diversis in rectis A C, B C, moventur, incident in se mutuò obliquè in C, et requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendum est situs plani F I, a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus C; deinde corporis utriusque motus A C, B C, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, et A F, B E et B H, unum nempe A F seu D C, et B H seu E C, huic plano F I perpendiculararem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundum parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantum secundum perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeoque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; et motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem ante et post conflictum (Coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A et B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas D C et E C, velocitatibus D C et E C, atque



in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastici)



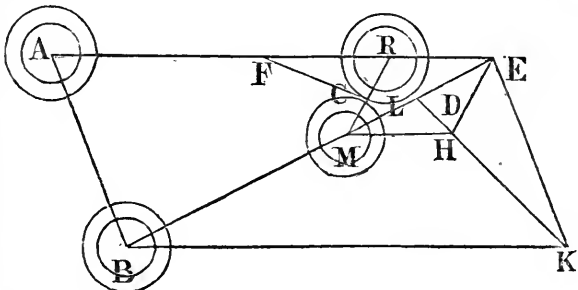
existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progreditur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regreditur amisso motu suo et (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regreditur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium  $15+1$  vel  $16+0$ , et differentiæ contrariorum  $17-1$  et  $18-2$  semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum et reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergunt, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis A motus erat partium sex ante reflexionem et partium octodecim postea, et velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(n) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, et requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in punc-

ca, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, et ex velocitate parallêlâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) facîle reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D E, in C; sumptâ C L, æquali et parallêlâ velocitati secundum A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L et A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circa corporis centrum.

57. Datis duorum globorum A et B, directionibus, celeritatibus et diametris, unâ cum eorum situ ante conflictum, facile est determinare punctum concursus C, et situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingens. Globus A, feratur per lineam A E, et celeritate ut A E, globus B verò secundum directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A et B globorum centrâ per lineam A B, compleatur parallelogrammum A

B K E. Jungantur puncta D et K, et recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A et B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallêla, erunt M et R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, et sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . *Dem* . . . Quoniam recta H M, est lineâ B K parallêla (per const.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H : et E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E, et alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur sit B M



et concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; et motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, et nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

#### COROLLARIUM IV.

*Commune gravitatis Centrum ( $^{\circ}$ ), corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, et B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque sit M R = E H, globi in puncto C, se mutuo contingant, et planum F L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. d.

( $^{\circ}$ ) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intra vel extra corpus positum, circa quod undique partes in æquilibrio consistunt, ita ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circa planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, et semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, et pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta. Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, et in diametrum gravitatis concursus centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo et ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proinde si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes et æquales secari possint, centrum gravitatis a centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facile colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphaerarum et figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modo tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ a duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus et cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; et generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanice invenitur, si corpus ab aliqua sui parte liberè suspendatur, et ab eadem parte a qua pendet, demittatur perpendiculum ita ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut prius, noteturque iterum linea perpendiculi ab hac parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

60. Centra gravitatis a et b, corporum A et B, rectæ seu vecte inflexibili et gravitatis experte, a b jungantur; et ita dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A et B... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1 $^{\circ}$ . a b, horizonti parallela,





cit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ. Hoc postea in Lemmate  
 XXIII. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eo-  
 dem plano; et <sup>(9)</sup> eâdem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant  
 in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in  
 lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit  
 vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum  
 corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab

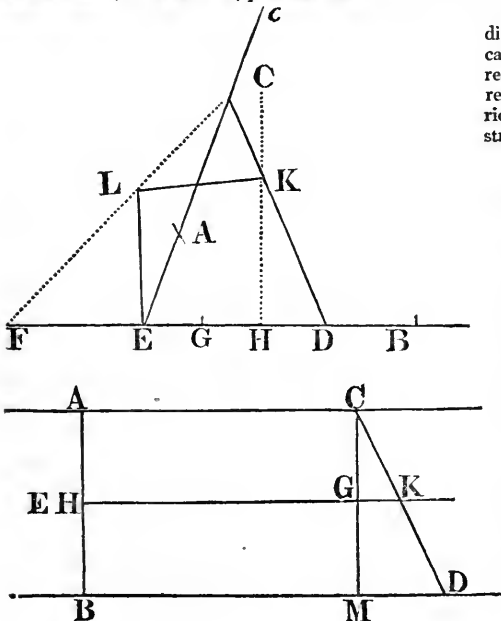
tā velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datā B D, ad A C, et eum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit  $E F = G D$ , et quia B G : A E = B D : A C, (per const.) erit  $B G + B D$ , seu  $G D : A E + A C$ , seu  $E C = B D : A C$ , adeoque  $A C : B D = E C : G D$ , seu E F; sit igitur E C ad E F; in ratione datā, et propterea ex datis angulo C E F, et laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datā C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; et quia in triangulo E F C, specie dato, datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeoque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C et D, punctum L semper locabitur in rectā E L, positione datā, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, et latus E F, positione datum ad

latus  $FL$ , datam habet rationem. Junge  $LK$ , et quia  $CL : CF = CK : CD$  (per const.), similis erunt triangula  $CLK$ ,  $CFD$ , et ob datam  $FD = EG$ , et datam rationem  $FD$ , ad  $LK$ , seu  $CD$ , ad  $CK$ ; dabitur  $LK$ , magnitudine; lineæ  $LK$ , æqualis capiatur  $EH$ , et ducta  $HK$ , erit semper  $E L K H$ , parallelogrammum, ob  $LK$ , æqualem et parallelam ipsi  $EH$ , locabitur ergo punctum  $K$ , in parallelogrammi illius latere  $HK$ , quod positione datum est; nam latus  $E L$ , positioe, latus verò  $EH$ , positioe et magnitudine datur. Quarè punctum  $K$ , seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progredietur. Quoniam verò, ex demonstrationibus, triangula  $CEF$ ,  $LEF$ , specie, et tria latera  $E C$ ,  $E L$ ,  $E F$ , positione data sunt, manifestum est rationem rectæ  $E L$ , seu lineæ æqualis  $HK$ , ad  $E C$ , datam esse. Verùm quia punctum  $C$ , uniformiter movetur (per hyp.), uniformiter crescit recta  $E C$ , ergo pariter recta  $HK$ , uniformiter augetur, adeoque punctum  $K$ , æqualiter progredietur in lineâ rectâ  $HK$ , positione datâ. Q. e. 1<sup>o</sup>. demonstrandum...

20. Corpora ex punctis fixis A et B, in diversas plagas progrediantur, semperque capiatur B G, in partem oppositam directioni B D, F D, verò secundum directionem B D, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 20. casu.

68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, et ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, positione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; si autem lineæ parallelæ A C et B D, ad se mutuò accedant tandemque coincident, eadem semper valet demonstratio, ac proinde si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hac eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.

(q) 69. Si rectæ  $A C$  et  $B D$ , non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis  $A$  et  $B$ ,  $C$  et  $D$ , in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis  $a b d c$ , pro lubitu assumptum demittantur perpendicularia  $A a$ ,  $B b$ ,  $C c$ ,  $D d$ ; et ex centris gravitatis  $H$  et

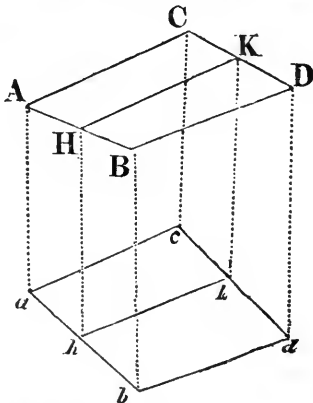


hoc centro communi in ratione datâ. Similiter et commune centrum horum duorum et tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum et centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo et commune centrum horum trium et quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium et centrum quarti in datâ ratione, et sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

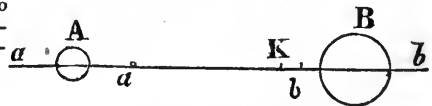
(r) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cùm distantia centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud, vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

K, perpendiculara H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A et B, in lineis A C, B D, evidens est puncta a et b, uniformiter moveri in lineis a c, b d, et quia A a, B b H h, parallelæ sunt; lineæ A B, a b, in eadem ratione datâ in H, et h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, et k, in lineis C D, et c d; Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeoque centrum gravitatis H, semper movetur in plano H h K k, ad planum a b d c, normali; si loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo demonstrari posset cen-

tium illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium intersectione, quæ cum sit lineâ rectâ H K, positione data, et punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.



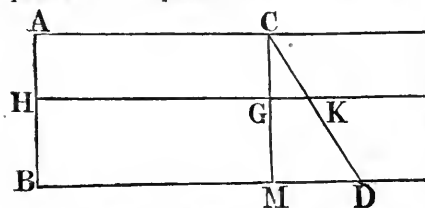
trum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut cen-



(r) 70. Si duobus corporibus A et B, quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motus quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spatia A a, B b, centri gravitatis status non mutatur; Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A et B, (per hyp.) erit  $A : B = KB : KA$  (60) et quia impressæ quantitates motus (6)  $A \times Aa$ ,  $B \times Bb$  æquales sunt (per hyp.), erit etiam  $A : B = Bb : Aa$ , adeoque  $KB : KA = Bb : Aa$ , et componendo vel dividendo  $Kb : Ka = Bb : Aa = A : B$ ; dum igitur corpora A et B, ad puncta a et b, motibus impressis perveniunt, centrum K, immotum remansit (60), ac proinde ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motus vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gra-

In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; et reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum et quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositae; et propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. (6) Est igitur systematis corporum plurium Lex

vitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietum.



(8) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper aestimari debet.... Dem.... 1<sup>o</sup>. Corpora duo A et B, in lineis AC et BD parallelis, progrediantur cum velocitatibus, ut AC, BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC et BD, parallelam feratur; ducatur, CM, rectae AB parallela. Quoniam B : A = AH : BH (60) erit B : B + A = AH : AB, et ob parallelas AB, et CM; GK et MD, erit AH : AB = CG : CM = GK : MD, adeoque GK : MD = B : A + B, et B x MD = A + B x GK; verum quia AC = HG = BM, erit HK = AC + GK, et BD = AC + MD; quare A + B x HK = A + B x AC + A + B x GK = A x AC + B x AC + B x MD, ob A + B x GK + B x MD, ergo A + B x HK = A x AC + B x BD, seu

summa corporum A et B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, aequalis est summae factorum in singulis corporibus A et B, in suam velocitatem AC, BD.... 2<sup>o</sup>. Si corpora contrariis directionibus CA et BD, moveantur, negativa erit quantitas motus corporis A, propter contrariam directionem CA, adeoque differentia quantitatum motus corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motus in eandem plagam, aequalis erit facto ex summa corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3<sup>o</sup>. Si parallelae AC, BD, ad se mutuò accedant tandemque coincident, eadem semper manet demonstratio, quae proinde etiam obtinet, dum corpora in eadem recta feruntur.... 4<sup>o</sup>. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viae centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, et ex demonstratis liquet summam quantitatum motus corporum in plagam versus quam movetur centrum gravitatis esse aequalem facto ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5<sup>o</sup>. Si aequalis non sit corporum motus, sed quacumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinite parvis tanquam aequalis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motus corporum aequalis est facto ex summa corporum in velocitatem centri gravitatis; unde quovis tempore quantitas motus singulorum corporum aequalis est quantitati motus quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent... 6<sup>o</sup>. Si trium corporum systema moveatur, duo

eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

### COROLLARIUM V.

(<sup>c</sup>) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentię motuum tendentium ad eandem partem, et summę tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) et ex his summis vel differentiis oriuntur congressus et impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem 11. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; et propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur

ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex *Dem.*) ac proinde trium plurimve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergo quantitas motus progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. d.

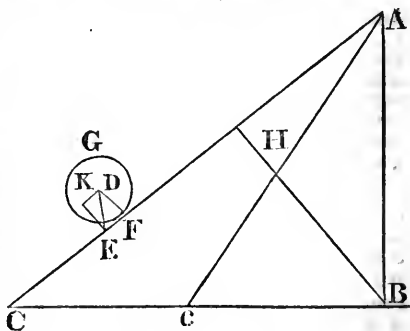
72. *Coroll. 1.* . . . Si differentię quantitatum motus versus partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est, progreditur in eam partem versus quam prævelat motus.

73. *Coroll. 2.* . . . Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in velocitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motus totius systematis in eandem partem progredientis.

(<sup>c</sup>) 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquę participant (*leg. 1. 2.*), adeoque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentię velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, et summę velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eadem manent antè et post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus et ictus magnitudines quibus corpora se mutuo feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictus magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, et corpus M, cum velocitate  $C + c$ , in corpus m, velocitate c, motum im-

pingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam  $C + c - c$ , seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Idem ergo erunt congressus ac proinde æquales congressuum effectus in utroque casu (*per leg. 2.*), et propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

(<sup>a</sup>) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxta plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem . . . *Dem.* . . .



Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B: demittatur perpendicularum A B, et ex centro D,



experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

# COROLLARIUM VI.

*Si corpora moveantur quomodocumque inter se, et a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.*

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatis movendorum corporum) et secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem 11. ideoque nunquam mutabunt positiones et motus eorum inter se.

## Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta et experiētiā multiplici confirmata. Per leges duas primas et corollaria duo prima Galilæus invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, et motum

globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quæ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindē tota plano sustinetur, altera verò D K; seu F E, plano parallela quā solā globus ad motum secundum directionem plani A C, sollicitatur, et erit vis acceleratrix juxta plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, et angulos rectos F et B, æquales, similia sunt, est F E : D E = A B : A C. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. d.

76. Coroll. 1. . . . Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxta directionem D E, horizonti perpendiculari constans est (26), et vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datā A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 10. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, et motu uniformiter retardato ascendit (25). 20. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatā temporum quibus percurruntur, itemque velocitatum quæ his

temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatā spatio-rum (27, 28). 30. Spatium a gravi in plano inclinato percursum ab initio motus computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitā (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore produciunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

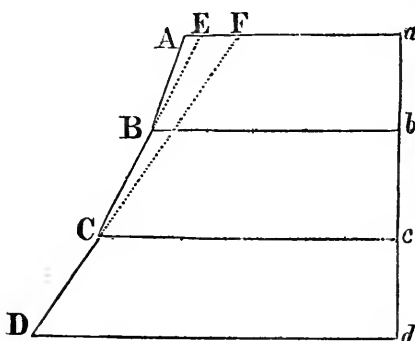
78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, A H : A B = A B : A C, adeoque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percurra (76); ergo A H, A B, sunt spatia eodem tempore percurra.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatā A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatā A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H,



et tempore toto vim totam imprimit, et velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates et tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit et velocitates

respectu K L; ergò celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cum velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amisisset. Q. e. d.

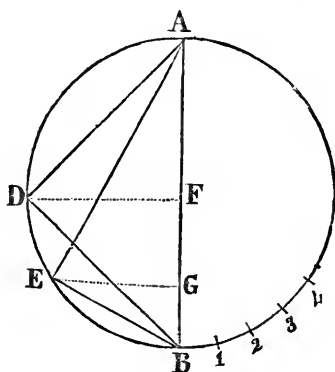
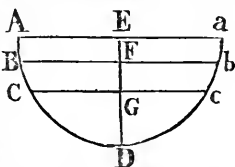


84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, et flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentes, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizontæ distantia . . . . Dem.—Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis et perpendiculari, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E et F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per A B, (81), adeoque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, a c, acquisitæ. . Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. d.

85. Augentur planorum numerus, et singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, et quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (85), manifestum est; gravis per curvam descendentes velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D,

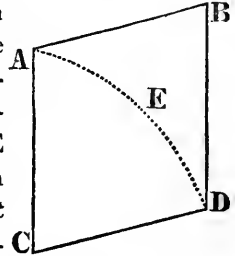
æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

86. Si grave descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, et ex puncto curvæ infimo D, recta D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendentes eandem esse velocitatem in punctis æquæ altis B et b, C et c. Quare cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquæ altum, in quo omnis velocitas extinguitur, et in punctis correspondentibus B et b, C et c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis et æqualis fuerit, singuli arcus æquæ alti C D et D c, B D et D b, A D et D a, æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).



87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendentes in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B . . . . Dem.—Ductâ E G, horizonti parallelâ adeoque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergò ad velocitatem per A B acquisitam in ratione subduplicatâ G B, ad A B (28.) Sed propter triangula rectangula similia A E B, B G E, G B: E B = E B: A B,

aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, et altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut si corpus A motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam AB et motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem AC: compleatur parallelogrammum ABDC, et corpus illud motu composito reperiatur in fine temporis in loco D; et curva linea AE D, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta AB tangit in A, et cujus ordinata BD est ut AB q. Ab iisdem legibus et corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem et lege tertiâ Christophorus Wrennus, Eques auratus, Johannes Wallisius, S. T. D. et Christianus Hugenius, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum et reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, et eodem fere tempore cum Societate Regiâ communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: et primus quidem Wallisius, deinde Wrennus et Hugenius

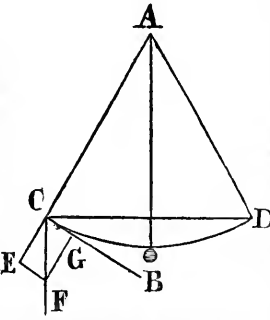


adeoque EB, ad AB, in ratione subduplicatâ GB ad AB; velocitas igitur per arcum EB, acquisita in B, est ad velocitatem per AB, acquisitam, ut chorda EB, ad diametrum AB. Q. e. d.

88. Coroll. Ductâ quâvis alterâ chordâ DB, erit etiam velocitas per arcum DB, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum AB, ut DB, ad AB, ac proinde velocitates per arcus DB, EB acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos descendens in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

89. Si pendulum B, circâ punctum fixum A, rotetur, et globus B, filo AB, appensus instar puncti consideretur, arcum circuli CBD, describet, idemque globus huic motus accidet ac si in superficie sphaericâ immotâ et perfectè lævigatâ sublato filo volveretur.

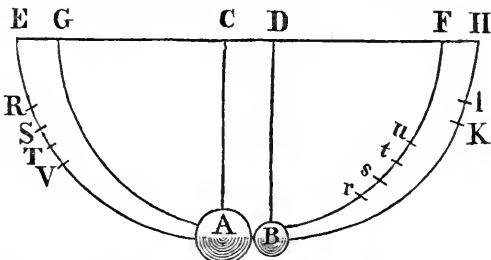
... Dem. — Ad punctum C, adducatur globus



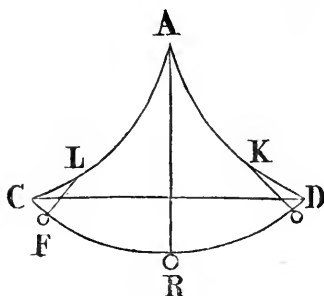
B, et exinde demittatur; et recta CF, horizontali perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ CE, ad arcum seu tangentem in C perpendiculari; altera verò tangente CG; vis CE, quâ filum AC, directè trahitur ad globi motum nihil confert et solâ vi ut C G, urgetur; arcus verò CBD, considerari potest ut polygonum cujus latus unum in C, positionem habet tangentis CG, et si globus per planum CG, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis CE, plano CG, tota sustinetur, et globus solâ vi CG, ad motum in plano CG, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcus CBD, eodem modo demonstrari possit, patet filum AC, superficie C B D, vices subire, et in utroque casu motum globi per arcum CBD, eadem ratione perfici. Q. e. d.

90. Coroll. I. Pendulum AB, inter duas laminas curvas ALC, AKD, immotas et sese contingentes in A, itâ oscilletur ut filum AB, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oscilletur pendulum, curvis laminis filum circumplectitur easque perpetuò tangat ut in L et K; per hanc fili ad laminas applicationem continuo impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam CBD, describere cogitur; et eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac

nius, inventum prodiderunt. Sed et veritas comprobata est a Wrenno coram Regiâ Societate per experimentum pendulorum: quod etiam Clarissimus Mariottus libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistentiæ aëris tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphaerica A, B filis parallelis et æqualibus A C, B D, a centris C, D. His centris et intervallis describantur semicirculi E A F, G B H radiis



C A, D B bisecti. <sup>(b)</sup> Trahatur corpus A ad arcus E A F punctum quodvis R, et (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V. Est R V retardatio ex resistentia aëris. Hujus R V fiat S T pars quarta sita in medio; ita scilicet ut R S et T V æquantur; sitque R S ad S T ut 3 ad 2. Et ista S T exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proximè. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, et velocitas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T.



si grave B, libere et absque filo per curvam immotam et perfecte lævigatam C B D, incederet.

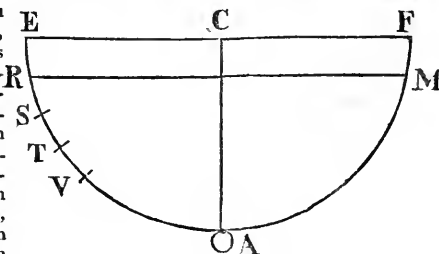
91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficiebus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1o. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularẽ arcui percurso correspondentem (85). 2o. Pendulum ex C demissum, vi gravitatis urgente ad punctum infimum B, descendet, et ex impetu concepto, per arcum B D, ascendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amissâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabatur, amissamque recuperans velocitatem

redibit ad punctum C, atque ita continuas oscillationes itu et reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

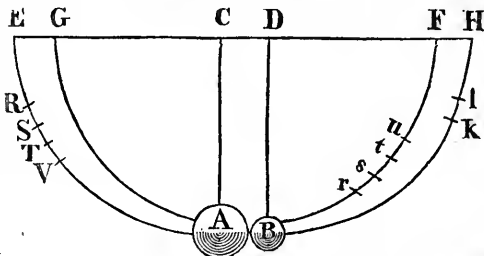
92. Coroll. 3. Si nulla foret mediï resistentia, nullaque circa laminas incurvas aut centrum rotationis frictio, æquales et perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verum has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuo breviores describit, ac tandem omninò quiescit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcus E A F, punctum quodvis R, et demittatur inde, sublata mediï resistentiâ ad eandem altitudinem M, ascendere et rursus ad punctum R, redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu et reditu compositam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet mediï retarda-



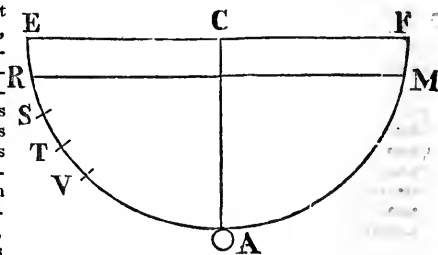
Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs  $T A$ . Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometricis notissima. Post reflexionem perveniat corpus  $A$  ad locum  $s$ , et corpus  $B$  ad locum  $k$ . Tollatur corpus  $B$  et inveniatur locus  $v$ ; a quo si corpus  $A$  demittatur et post unam oscillationem redeat ad



locum  $r$ , fit  $s t$  pars quarta ipsius  $r v$  sita in medio, ita videlicet ut  $r s$  et  $t v$  æquantur; et per chordam arcûs  $t A$  exponatur velocitas, quam corpus  $A$  proxime post reflexionem habuit in loco  $A$ . (c) Nam  $t$  erit locus ille verus et correctus, ad quem corpus  $A$ , sublatâ aëris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus  $k$ , ad quem corpus  $B$  ascendit, et inveniendus locus  $l$ , ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus  $A$  (ut ita dicam) in chordam arcûs  $T A$ , quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco  $A$  proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs  $t A$ , ut habeatur motus ejus in loco  $A$  proxime post reflexionem. Et sic corpus  $B$  ducendum erit in chordam arcûs  $B l$ , ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; et tum demum conferendi sunt motus inter se et colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, et faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putâ pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi cor-

tionem in duplici ascensu et descensu; quare ut habeatur medii retardatio in uno tantum descensu, sumenda est quarta pars totius retardationis, id est quarta pars arcus  $R V$ , dummodo ille descensus neque ex puncto supremo  $R$ , neque ex infimo  $V$  ordiatur: nam cum major sit medii retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus a pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcubus, et retardatio descensus per  $R A$ , major erit quartâ parte totius retardationis  $R V$  ut retardatio ultimi ascensus  $A V$ , minor erit quartâ parte totius retardationis  $R V$ . Hoc autem aut simili calculo determinavit Newton punctum  $S$  tale ut retardatio in descensu per  $S A$  sit quarta pars totius retardationis  $R V$ . Dicatur arcus  $R A$ ,  $l$ , arcus  $R V$ ,  $4 b$ , arcus quæsitus  $S A$ ,  $x$ ; sintque retardationes

arcubus descriptis proportionales, erit arcus  $S A$  ( $x$ ) ad arcum  $R A$  ( $l$ ) ut retardatio arcus  $S A$  quæ statuitur esse  $b$ , seu quarta pars totius  $R V$ , ad retardationem primi arcus  $R A$  quæ erit



pora sibi mutuo directè occurrerant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem et reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motus, et amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus et B cum sex, et redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractioe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim et restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, et fiet motus duarum partium in plagam contrariam: et sic de motu corporis B partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, et B tardius cum partibus quinque, et post reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, facta translatione partium novem de A in B. Et sic in reliquis. A congressu et collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum conspirantium et differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius et alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo A B; tum loca s, k notare, ad quæ corpora ascendeant post concursum. Sed et in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, et textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis obijciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritie. neutiquam pendencia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est,

b: x. Quærantur successivè retardationes secundi, tertii, quartæ arcus eadem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione b: x. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, et sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu 4 b; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu x, obtinebitur, per approximationem autem inveniatur æqualis  $1 \frac{3b}{2}$ , sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, idèquæ cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. *Newt.*), erit locus verus et

correctus ad quem corpus A, sublata aëris resistantiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), et quâ ob aëris resistantiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

(a) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus et non elasticis æquè ac in duris et elasticis, ut potè a conditione duritie et elasticitatis, sed tantum ab actionis et reactionis æqualitate et oppositione pendencia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniatur motus post conflictum, debebit

debebit solummodo reflexio minui in certâ proportionē pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ Wrenni et Hugenii corpora absolutē dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. <sup>(e)</sup> Certiûs id affirmabitur de perfectē elasticis. <sup>(f)</sup> In imperfectē elasticis velocitas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctē conglomeratâ et fortiter constrictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula et mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, et respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus et reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientiâ plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibvis A, B, se mutuò trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B, quam illud alterum B in prius A, obstaculum magis urgebitur pressione corporis A quam pressione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum et obstaculi moveatur in directum in partes versus B, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum et legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformi-

solummodò reflexio minui in certâ proportionē, pro quantitate vis elasticæ (52).

(<sup>e</sup>) 97. Certiûs id affirmabitur de perfectē elasticis; corpora enim perfectē dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeoque cum nihil sine causâ fiat, corporum perfectē durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

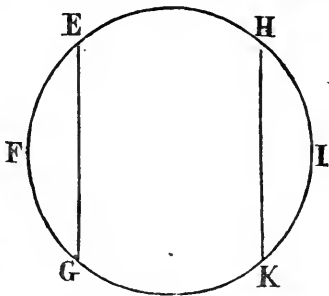
(<sup>f</sup>) 98. In imperfectē elasticis, velocitâs reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abruptatur fibra, ea non sese restituit, adeoque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic

fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahitur. His causis addi potest intestinus partium corporis percussus motus sono ipso satis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illustratur in Commentariis Instituti Bononiensis. Tria globulorum vitreorum paria sibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, secundi duarum, tertii unius, ita ut essent diversorum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1. Fecit ut globuli primi paris filo appensi simul congrederentur, notavitque velocitatem respectivam quam habuerunt vel antequam vel post ictum, detractâ tamen, more Newtoniano, aeris resistentiâ; idemque tentavit tum in 2<sup>o</sup>. tum in 3<sup>o</sup>. pari. In 1<sup>o</sup>. globulorum parium cum velocitas respectiva ante ictum fuisset 11, fuit post ictum 10; in 2<sup>o</sup>. pari cum fuisset antequam ictum 16, fuit post ictum 15; in 3<sup>o</sup>. pari cum fuisset antequam ictum 31, fuit post ictum 30. Unde



ter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, et idcirco æqualiter trahentur in invicem. <sup>(5)</sup> Tentavi hoc in magnete et ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram et ejus partes mutua est. Secetur terra F I plano quovis E G in partes duas E G F et E G I: et æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio H K quod priori E G parallelum sit, pars major E G I secetur in partes duas E G K H et H K I, quarum H K I æqualis sit parti prius abscissæ E F G: manifestum est quod pars media E G K H pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, et quiescet. Pars autem extrema H K I toto suo pondere incumbet in partem mediam, et urgebit illam in partem alteram extremam E G F; ideoque vis quâ partium H K I et E G K H summa E G I tendit versus partem tertiam E G F, æqualis est ponderi partis H K I, id est ponderi partis tertiæ E G F. Et propterea pondera partium duarum E G I, E G F in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, et ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu et reflexione idem pollent, quorum velocita-

velocitatis respectivæ defectus erat in primo pari 1: 11. in 2<sup>o</sup>. pari 1: 16. in 3<sup>o</sup>. pari 1: 31; illi autem defectus sunt ferè diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter positam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tensiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulsa sese restituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones se assecutum esse ex graviore vel acutiori chordarum sono intelligebat; in singulis tensionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appensum et in medio tantisper complanatum in chordam demittebat, et detractâ aëris resistentiâ, velocitatem respectivam antè et post ictum notabat. Observavit autem: velocitatem antè ictum esse ad velocitatem post ictum, ut 11, ad 10, in 1<sup>a</sup>. tensione, cum chorda pulsa restitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2<sup>a</sup>. tensione, cum chorda restitu-

eretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3<sup>a</sup>. tensione, cum chorda restitueretur tempore 1; undè concludit defectus singulos velocitatis post ictum, temporibus restitutionum esse proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine et figurâ, constans observatur ratio velocitatis respectivæ post ictum ad velocitatem respectivam ante ictum; sed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti ostendunt defectus velocitatis respectivæ post ictum in globis homogeneis esse in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compressi restituantur.

(\*) 99. Si magnes suberis frusto, similiterque ferrum alio suberis frusto imponentur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè stagnent, æquali motûs quantitate sibi mutuo obviam eunt, ita ut eorum celeritates sint in ratione ponderum reciproca; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio consistunt. Quarè hoc experimen-

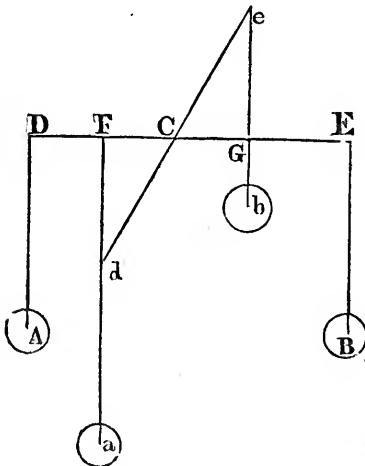
tes sunt reciproce ut vires insitæ: (<sup>h</sup>) sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent et conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oscillante librâ sunt reciproce ut eorum velocitates sursum et deorsum: hoc est pondera, si rectâ ascendunt et descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantiae ab axe libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendant vel descendunt oblique, æquipollent, quæ sunt reciproce ut ascensus et descensus, quâtenus facti secundum perpendicularum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in trochlea seu polyspasto vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus vel directè vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis et similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum et impediendum, si sunt reciproce ut

to manifestum est æqualem esse ferri in magnetem et magnetis in ferrum actionem. Similiter si quis in cymbâ aquis annatante positus, cymbam alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove instrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ita ut earum velocitates sint in ratione reciproca ponderum.

(<sup>h</sup>) 100. In movendis instrumentis mechanicis, agentia idem pollent et conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum directionem virium æstimatæ sunt recipro-

cè ut vires absolutæ . . . *Dem.*—Duae potentia, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuo ita agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrâ propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatür vectis cujus longitudo et hypomocion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eadem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuo moveant, iidem erunt in vecte et in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuo, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundum eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A et B, rotetur circa hypomocion C, ut situm d e, obtineat, et producatür filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem, percurrit spatium F d; et pondus B, contrâ propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeoque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a  $\times$  F C; momentum ponderis b, est ut b  $\times$  C G (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C d, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergo momenta ponderum a et b, sunt inter se ut a  $\times$  F d, et b  $\times$  G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in suas respectivè spatia eodem tempore percursa, adeoque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciproce ut velocitates secundum directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. d.

101. *Coroll.* Cùm ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in



velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò.

(<sup>1</sup>) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum.

(\*) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas facibus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia et usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, et contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis et resistantis sint reciprocè ut vires; agens resistantiam sustinebit: et majori cum velocitatum disparitate <sup>(1)</sup> eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiâ resistantia omnis,

suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundum propriam directionem ex dispositione machinae percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

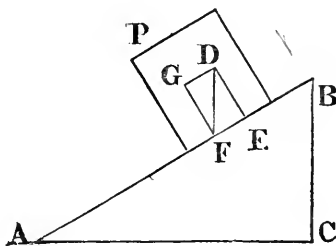
(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimiendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, et momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergo sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit centrum cujus radius est manubrii longitudo, e centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 105. Momentum cupei est ut factum (101), ex vi impressa a malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundum directionem vis a malleo impressæ; momentum verò resistantiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistantiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebûs cunei perpendiculares, juxta quarum directionem partes ligni a cuneo moventur; est etiam momentum resistantiæ ut factum ex resistantiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundum

lineas faciebꝫ cunei perpendiculares. Quoni-  
am igitur cuneus agens secundꝫ lineam basi  
ipsius perpendicularẽ, totam suam altitudinem  
percurrit, dum partes ligni tota basi cunei la-  
titudine a se invicem removentur, erit (in casu  
æquilibrium) vis cunei ad ligni resistantiam, ut  
cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(1) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie, rigiditate et funium flexione ortas in machinis considerare uecessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmii, Leibnizii Amontonii, Parentii, La-Hirius et alii tractarunt. Bulfingerus Tom 2<sup>o</sup>. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theorematum quæ ob eorum facilitatem et usum hic exscribere non abs re erit.



Suprà horizontem A C, experimento sæpius instituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut si corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non descendat: descendat autem si angulus nonnihil

quæ tam ex contiguorum et inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum et ab invicem separandorum cohæsione et elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistantiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quàm latè pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, et ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

augeatur: et hæreat cum aliquâ adversus descensum renitentiâ, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ita pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterum.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ita pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano horizontali, cum trahitur in directione ad horizontem parallelâ . . . . *Dem.*—Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus absolutum P, seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; et ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, et E F, seu D G, plano parallelam resolvitur (41); vis D E, a plano A B, etiam perfectè lævigato tota sustinetur, et solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur juxta plani directionem descendere; Cum igitur ob frictionem in plano aspero A B, tantum non descendat, erit frictio æqualis vi E F; est itaque pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc est, ob angulum E rectum et angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q. erat 1<sup>um</sup>.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, et ita planum A B, se habebit ut planum horizontale respectu ponderis D E; vis autem F E, seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus D E, secundum directionem plano A B, parallelam; et ob triangulorum F D E, B A C, similitudinem, manifestum est pondus D E, esse ad frictionem E F, seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2<sup>um</sup>.

105. *Coroll.* In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicitur f; in plano horizontali F, et erit per 1<sup>um</sup>. theor.  $P : f = A B : B C$ ; et per 2<sup>um</sup>. theorema  $P : F = A C : B C$ , seu  $F : P = B C : A C$ , adeoque per compositionem rationum P.  $F : P. f = A B \times B C : B C \times A C$ , ac proinde  $F : f = A B : A C = F D : D E$ ; hoc est, frictio in plano horizontali est ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut pressio in plano horizontali ad pressionem in plano inclinato.

DE

# MOTU CORPORUM

## LIBER PRIMUS.

---

### SECTIO I.

*De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.*

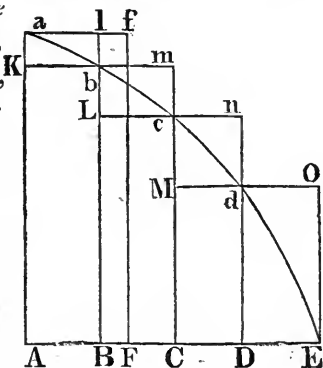
#### LEMMA I.

*Quantitates, ut et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, sunt ultimò æquales.*

**SI** negas; fiant ultimò inæquales, et sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypothesin.

#### LEMMA II.

*Si in figurâ quâvis A a c E, rectis A a, A E et curvâ a c E comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque A b, B c, C d, &c. sub basibus A B, B C, C D, &c. æqualibus, et lateribus B b, C c, D d, &c. figuræ lateri A a parallelis contenta; et compleantur parallelogramma a K b l, b L c m, c M d n, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, et numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A K b L c M d D, circumscripta A A l b m c n d o E, et curvilinea A a b c d E, sunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum  $K l$ ,  $L m$ ,  $M n$ ,  $D o$ , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi  $K b$  et altitudinum ( $^m$ ) summa  $A a$ , id est, rectangulum  $A B l a$ . Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus  $A B$  in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I.) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. e. d.

### LEMMA III.

*Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines  $A B$ ,  $B C$ ,  $C D$ , &c. sunt inæquales, et omnes minuantur in infinitum.*

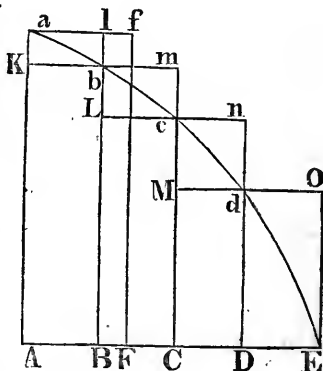
Sit enim  $A F$  æqualis latitudini maximæ, et compleatur parallelogrammum  $F A a f$ . ( $^n$ ) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ  $A F$  in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 2.* Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum  $a b$ ,  $b c$ ,  $c d$ , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

*Corol. 3.* Ut et figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

*Corol. 4.* ( $^o$ ) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros  $a c E$ .) non sunt rectilineæ sed rectilinearum limites curvilinei.



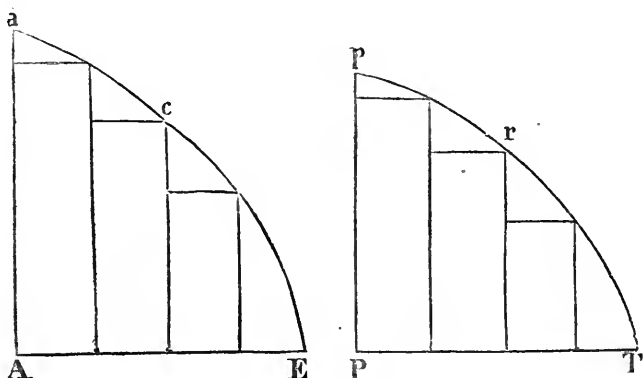
( $^m$ ) 106. Si fuerint quotcumque et cujusvis generis quantitates decrescentes,  $A a$ ,  $B b$ ,  $C c$ ,  $D d$ , erunt omnium differentiarum simul sumptæ æquales excessui maximæ suprâ minimam. Nam perspicuum est  $A a - B b + B b - C c + C c - D d = A a - D d$ : unde si ultima seriei quantitas sit  $o$ , ut in serie  $A a$ ,  $B b$ ,  $C c$ ,  $D d$ ,  $o$ , summa differentiarum  $K a + L b + M c + D d$ , æqualis erit quantitati maximæ  $A a$ .

107. Linea  $B b$ , motu sibi semper parallelo accedat ad lineam  $A a$ , et interim punctum  $b$ , ita moveatur in linea  $B b$ , ut semper reperiatur in arcu  $a b$ ; decrescente linearum  $A a$ ,  $B b$ , distantiâ  $A B$ , decrescit quoque earum differentia  $K a$ , ac tandem evanescente  $A B$ , evanescit  $K a$ , et  $B b$ , seu  $A K$ , fit ultimò æqualis lineæ

$A a$ ; evanescent autem  $A B$  et  $K a$ , cum lineæ  $A a$ ,  $B b$ , neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum  $A a$ ,  $B b$ , differentia  $K a$ , minor est quâvis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu  $A K$  et  $B b$ ; quantitas autem evanescent, seu infinitè parva, est ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas  $B b$  seu  $A K$  et  $A a$ , seu  $A K + K a$ , pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente  $K a$  trianguli  $K a b$ , et parallelogrammi  $K l$ , aræ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis  $A b$ , parallelogrammum istud  $A b$ .

## LEMMA IV.

*Si in duabus figuris A a c E, P p r T, inscribantur (ut infra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, et ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod figuræ duæ A a c E, P p r T, sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, et ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per Lemma III.) ad summam priorem, et figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. e. d.

*Corol.* Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; et partes illæ, ubi numerus earum augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut

usurpari potest pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum K l, infinitesimum esse respectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilinæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem suum A E, revolvatur, et quælibet ordinata A a, B b, describet circulum, cujus est, ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut K B, a B, describet cylindrum evanescentem, et rectangula, K l, L m, M n, D o, singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis erit cylindro ex rotatione rectanguli A l descripto. Quare cum

hic cylindrus sit infinitesimus, patet (per Lemma I.) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilinæ A E c a, genitum esse rationem æqualitatis.

(<sup>n</sup>) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset linæ A F, figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (Lem. II.); cùm igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque est parallelogrammo A f.

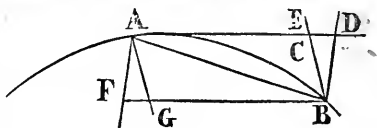
(<sup>c</sup>) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non sunt rectilinæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum







*Corol. 1.* Undè si per B ducatur tangenti parallela B F, rectam quamvis A F per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc B F ultimo ad arcum evanescentem A C B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B D rationem semper habet æqualitatis ad A D.



*Corol. 2.* Et si per B et A ducantur plures rectæ B E, B D, A F, A G, secantes tangentem A D et ipsius parallelam B F; ratio ultima abscissarum omnium A D, A E, B F, B G, chordæque et arcus A B ad invicem erit ratio æqualitatis.

*Corol. 3.* Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

### LEMMA VIII.

*Si rectæ datæ A R, B R cum arcu A C B, chordâ A B et tangente A D, triacula tria R A B, R A C B, R A D constituunt, dein puncta A, B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, et ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A B, A D, A R ad puncta longinqua b, d et r produci, ipsique R D parallela agi r b d, et arcui A C B similis semper sit arcus A c b. Et coëuntibus punctis A, B, angulus b A d evanescet, et propterea triacula tria semper finita r A b, r A c b, r A d coincident, suntque eo nomine similia et æqualia. Unde et hisce semper similia et proportionalia R A B, R A C B, R A D fient ultimo sibi invicem similia et æqualia. Q. e. d.

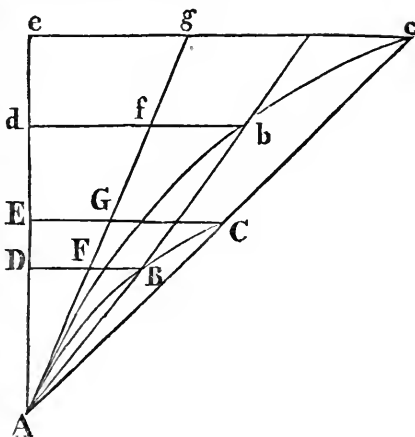
*Corol.* Et hinc triacula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

### LEMMA IX.

*Si recta A E et curva A B C positione datæ se mutuo secant in angulo dato A, et ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur B D, C E, curvæ occurrentes in B, C, dein puncta B, C, simul accedant ad punctum A: dico quod areae triangulorum A B D, A C E erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper A D produci ad puncta longinqua d et e, ut sint A d, A e ipsis A D.

A E proportionales, et erigantur ordinatæ d b, e c ordinatis D B, E C parallelæ quæ occurrant ipsis A B, A C productis in b et c. Duci intelligatur, tum curva A b c ipsi A B C similis, tum recta A g, quæ tangat curvam utramque in A, et secet ordinatim applicatas D B, E C, d b, e c in F, G, f, g. (\*) Tum manente longitudine A e coeant puncta B, C cum puncto A; et angulo c A g evanescente, coincident aræ curvilineæ A b d, A c e cum rectilineis A f d, A g e; ideo-



que (per Lemma V.) erunt in duplicata ratione laterum A d, A e: Sed his aræ proportionales semper sunt aræ A B D, A C E, et his lateribus latera A D, A E. Ergo et aræ A B D, A C E sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum A D, A E. Q. e. d.

## LEMMA X.

*Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinatâ et immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuat, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.*

Exponentur tempora per lineas A D, A E, et velocitates genitæ per ordinatas D B, E C; (†) et spatia his velocitatibus descripta, erunt ut aræ A B D, A C E his ordinatis descriptis, hoc est ipso motûs initio (per Lemma IX.) in duplicatâ ratione temporum A D, A E. Q. e. d.

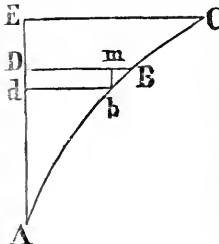
A B, majori angulo opposita, an tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

(\*) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, et mutata, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper  $A d : A e = A D : A E$ , coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

(†) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut aræ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinite propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu A D, A E, lineæ D B, d b, et rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinite-

simum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, et tempusculo D d, (5.) hoc est, ut rectangulum D d  $\times$  d b, seu ut aræ D B d; si igitur aræ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut aræ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III.)

117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata et immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); et contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum et spatorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso



*Corol. 1.* (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, et mensurantur, per distantias corporum a figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

*Corol. 2.* (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim.

*Corol. 3.* (y) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim.

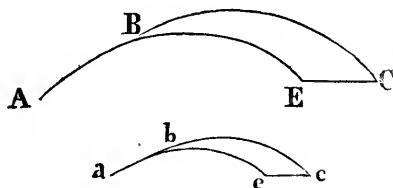
*Corol. 4.* Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè.

*Corol. 5.* Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

### Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, et earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus

motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(u) 118. Corpora duo A et a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B et b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales et similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungantur rectæ E C, e c, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponunt; Linæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales et similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpora aliquod eadem vi

acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (*Lem. X.*) B C, b c, et quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia E C, e c, non solùm motûs initio, sed et tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eadem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cùm igitur vires et tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione et duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motûs initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeoque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim (30) ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis

est, quod prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè et C directè et D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum  $B \times C \times \frac{1}{D}$  hoc est, quod A et  $\frac{BC}{D}$  sunt ad invicem in ratione datâ.

## LEMMA XI.

*Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (\*) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini.*

Cas. 1. Sit arcus ille A B, tangens ejus A D, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis B D, subtensa arcus A B. Huic subtensæ A B et tangenti A D perpendiculares erigantur A G, B G, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta, d, b, g, sitque I intersectio linearum B G, A G ultimo facta

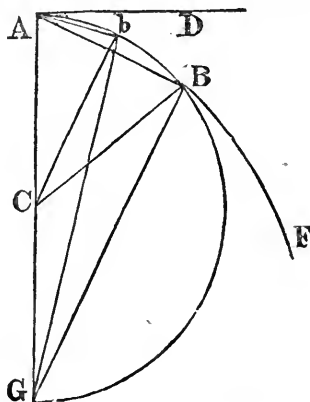
viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit  $S : s = G T T : g t t$ :

g t t, ideoque  $G : g = \frac{S}{T T} : \frac{s}{t t}$ , et  $T T : t t = S : G : s : g$ , hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè et quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

(\*) 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A et B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, et ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo describantur circuli, quorum unus radius C A, descriptus tanget curvam in A, alter autem radius C B, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò ac-

cedant puncta A et B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (Lein. I.), conjunguntur duo



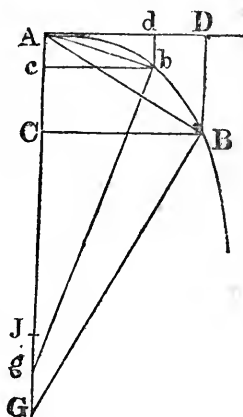
puncta contactus A et B, duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam osculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, est in ratione inversâ





*Corol. 4.* (') Triangula rectilinea  $A D B$ ,  $A d b$  sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum  $A D$ ,  $A d$ , inque sesquuplicatâ laterum  $D B$ ,  $d b$ ; utpote in compositâ ratione laterum  $A D$  et  $D B$ ,  $A d$  et  $d b$  existentia. Sic et triangula  $A B C$ ,  $A b c$  sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum  $B C$ ,  $b c$ . Rationem verò sesquuplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempè ex simplici et subduplicatâ componitur.

*Corol. 5.* Et quoniam  $D B$ ,  $d b$  sunt ultimo parallelæ et in duplicatâ ratione ipsarum  $A D$ ,  $A d$ : erunt areae ultimæ curvilineæ  $A D B$ ,  $A d b$  ( $^g$ ) ex naturâ parabolæ) ( $^h$ ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum  $A D B$ ,  $A d b$ ; et segmenta  $A B$ ,  $A b$  partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areae et hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium  $A D$ ,  $A d$ ; tum chordarum et arcuum  $A B$ ,  $A b$ .



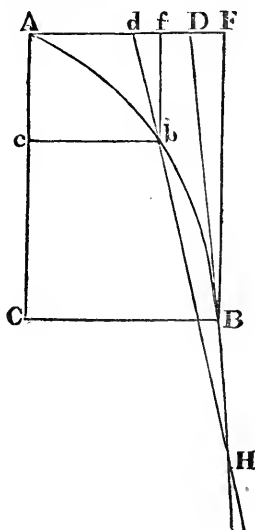
enim datâ velocitate percurta sunt ut tempora (5), adeoque pro temporibus substitui possunt arcus  $F A B$ ,  $f A b$ , sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergo et temporum.

(f) 128. Triangula rectilinea  $A B D$ ,  $A b d$ , sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum  $A D$ ,  $A d$ , inque sesquuplicatâ laterum  $B D$ ,  $b d$ ; ductis enim  $B F$ ,  $b f$ , ad tangentem  $A B$ , perpendicularibus, erit ob triangulorum  $B D F$ ,  $b d f$ , similitudinem  $B D : b d = B F : b f$ , et propterea areae triangulorum  $A B D$ ,  $A b d$ , sunt in ratione compositâ laterum  $A D$ ,  $A d$ , et  $B D$ ,  $b d$ ; sed (124, 125. Cor. 1.)  $B D : b d = A D^2 : A d^2$ , adeoque  $\sqrt{B D} : \sqrt{b d} = A D : A d$ , ergo triangula  $A B D$ ,  $A b d$ , sunt in ratione compositâ  $A D$ ,  $A d$ , et  $A D^2$ ,  $A d^2$ , hoc est, in ratione triplicatâ laterum  $A D$ ,  $A d$ ; sunt etiam in ratione compositâ  $B D$ ,  $b d$ , et  $\sqrt{B D}$ ,  $\sqrt{b d}$ , hoc est, in ratione  $B D \times \sqrt{B D} : b d \times \sqrt{b d}$ .

(g) 129. Arcus evanescens  $A B$ , in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs  $A$ , habentibus, pro arcu parabolæ usurpari potest. Ductâ enim  $A C$ , lineis  $B F$ ,  $b f$ , parallelâ, completisque parallelogrammis  $A B$ ,  $A b$ , erunt, ex demonstratis, rectæ  $F B$ ,  $f b$ , et ipsis æquales abscissæ  $A C$ ,  $A c$ , ut ordinatum  $C B$ ,  $c b$ , quadrata, quæ est notissima parabolæ proprietates.

130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari  $A B$ , (vid. fig. textûs) ordinata  $C B$ , ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam  $A C$ , et reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum  $A C$ , evanescit (Lem. I.), adeoque quadratum

ordinatæ  $C B$ , æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente  $A C$ , et diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale est prædictæ diametro.



(h) 131. Parabolæ segmentum  $A b B$ , est tertia pars trianguli rectilinei  $A C B$ , vel æqualis  $A D B$ , adeoque area curvilinea  $A D B b A$ , æqualis est duabus tertiis partibus ejusdem trianguli rectilinei  $A D B$ . Vid. Gregor. a S. Vincentio

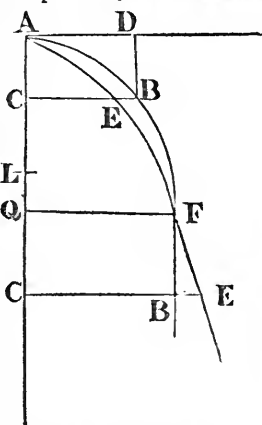


*Scholium.*

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum *A*, nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum *AJ* finitæ esse magnitudinis. (1) Capi enim potest *DB* ut  $AD^3$ : quo in casu circulus nullus per punctum *A* inter tangentem *AD* et curvam *AB* duci potest, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. (2) Et simili argumento si fiat *DB* successivè ut  $AD^4$ ,  $AD^5$ ,  $AD^6$ ,  $AD^7$ ,

Cor. 1. Prop. 252. Lib. V. Quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.

(1) 132. Sit parabolæ Apollonianæ *A EF*, axis *AC*, vertex *A*, tangens in vertice *AD*, ordinata *CE*, latus rectum *AL*, circulus diametro *AL*, descriptus parabolam osculatur in *A*, (130.) eundemque ac parabolam contactus angulum efficit in *A*. Ad eundem axem *AC*, et verticem



*A*, describatur superioris generis parabola cujus ordinatæ *CB* sint semper in subtriplicatâ abscissarum *AC*, et per parallelarum et aequalium *DB*, ratione; et erit angulus contactus *BA D*, angulo contactus *E A D*, infinitè minor. Dem.—Parabolæ *A FE*, latus rectum *AL* dicatur *A*; parabolæ *AB B*, latus rectum sit *B*, et erit ex harum curvarum naturâ  $A \times AC = CE^2$  et  $B^2 \times AC = CB^3$ , adeoque  $A C = CE^2 : A = CB^3 : B^2$ , undè reperitur  $C B^3 = C E^2 \times B^2 : A$ , et  $C B$  ad  $B^2 : A = CE^2$  ad  $C B^2$  ergo cum erit  $C B = B^2 : A$ , tunc erit  $CE^2 = C B^2$ , atque adeo parabolæ *A E E*, *A B B*, ordinatam habebunt communem quæ dicatur *Q F*, et sese intersectabunt in puncto *F*; jam verò si fuerit *C B* minor quam  $B^2 : A$ , erit quoque  $CE^2$  minor quam  $C B^2$ , adeoque *C E* minor quam *C B*; sed omnes ordinatæ inter verticem *A*, et ordinatam communem *Q F*, (quæ est  $B^2 : A$ ) minores sunt eâ, ergo omnes *C E* inter *A* et *F* comprehensæ sunt minores ordinatæ correspondentibus *C B*, tota igitur parabola Apollonianæ portio *A E F*, quâ ordinatæ *C E* terminantur, cadit intrâ portionem *A E F*, alterius parabolæ, ac proinde angulus contactus *B A D*, semper minor est angulo contactus

*E A D*, cum ergò angulus *E A D*, aucto in infinitum latere recto *AL*, possit sine fine minui, manifestum est angulum contactus *B A D*, quovis angulo dato *E A D*, infinitè minorem esse. Q. e. d.

133. Ad eundem axem *AC*, et verticem *A*, successivè describantur curvæ *A E E*; ejus naturæ, ut abscissarum *AC*, et ordinatarum *CE*, relatio exprimat æquatione generali  $A^m AC = C E^{m+1}$ . Si loco exponentis, *m*, successivè ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuò crescentes vel decrescentes, obtinebuntur infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor priore, dum numerus, *m*, semper crescit, et infinitè major dum numerus, *m*, semper decrescit. Dem.—Numerus, *m*, augcatur numero positivo, *n*, integro vel fracto, et describatur curva *AB B*, cujus æquatio sit  $B^{m+n} \times AC = C B^{m+n+1}$ . Et hac æquatione et superiori  $A^m AC = C E^{m+1}$ , reperitur  $AC = C B^{m+n+1} : B^{m+n} = C E^{m+1} : A^m$ , adeoque  $C B^{m+n+1} = C E^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$  atque  $C B^m$  ad  $B^{m+n} : A^m = C E^{m+1}$  ad  $C B^{m+1}$ ; sit  $C B^n = B^{m+n} : A^m$ , et erit  $C B^{m+1} = C E^{m+1}$ , adeoque  $C B = C E = Q F$ . Quare cum inter verticem *A*, et communem ordinatam *Q F*, omnes ordinatæ sint minores ipsâ *Q F*, patet ut suprâ (132), totam portionem *A E F*, curvæ *A E E*, cadere intrâ portionem *AB B*, alterius curvæ *AB B*, ac proinde angulum contactus *B A D*, quovis dato angulo contactus *E A D* infinitè minorem esse, et reciprocè angulum *E A D*, esse angulo *B A D* infinitè majorem. Q. e. d.

(2) 134. In æquatione  $A^m \times AC = C E^{m+1}$ , loco exponentis *m*, successivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. et erit *A C* successivè, ut  $CE^2$ ,  $CE^3$ ,  $CE^4$ ,  $CE^5$ , &c. et habebitur (133) series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Loco *m* substituantur successivè numeri decrescentes,  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ , &c. erit *A C*, successivè ut  $CE^2$ ,  $CE^{\frac{3}{2}}$ ,  $CE^{\frac{4}{3}}$ ,  $CE^{\frac{5}{4}}$ , &c. et habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major

&c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat  $D B$  successivè ut  $A D^3$ ,  $A D^{\frac{3}{2}}$ ,  $A D^{\frac{4}{3}}$ ,  $A D^{\frac{5}{4}}$ ,  $A D^{\frac{6}{5}}$ ,  $A D^{\frac{7}{6}}$ , &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos  $A D^2$ , et  $A D^3$ , inseratur series  $A D^{\frac{13}{6}}$ ,  $A D^{\frac{11}{5}}$ ,  $A D^{\frac{9}{4}}$ ,  $A D^{\frac{7}{3}}$ ,  $A D^{\frac{5}{2}}$ ,  $A D^{\frac{3}{2}}$ ,  $A D^{\frac{11}{4}}$ ,  $A D^{\frac{13}{5}}$ ,  $A D^{\frac{17}{6}}$ , &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(<sup>1</sup>) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies curvas et contenta. (<sup>m</sup>) Præmissi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiones enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minùs geometrica censetur; (<sup>n</sup>) malui demonstrationes rerum sequentium

(133). Loco  $m$ , substituantur numeri  $1, 1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{4}{5}, 1 + \frac{5}{6}$ , &c., erit  $A C$ , successivè ut  $CE^2, CE^{\frac{13}{6}}, CE^{\frac{11}{5}}, CE^{\frac{9}{4}}$ , &c., et habebitur series infinita angulorum contactus, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore (133), et inter binos quosvis angulos bujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series invenitur, sufficit inter duos numeros datos, v. G.  $1, 1 + \frac{1}{5}$ , seriem invenire numerorum crescentium, vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(<sup>l</sup>) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis et conì sit idem vertex eademque altitudo, et basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est conì, numerus laterum polygoni augeatur, et eorum longitudo minuatur in infinitum, et polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proinde ultima ratio pyramidis illiusque superficièi ad comunem et illius superficiem curvam, erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies conì æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex conì, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(<sup>m</sup>) 136. Quàm magnos progressus Geometria fecerit, hinc cognoscere licet. Veteres Geometræ in iis questionibus quæ *Infinitum* conside-

rationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant, et ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, et tandem propius ad invicem accedunt quam pro datâ quavis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, priùs supposebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deinde utrumque falsum demonstrabant, et ex hac reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quàm autem perplexus sit et tædiosus hic demonstrandi modus, nemo non videt. Verùm licet imperfecta admodum fuerit veterum Geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides et Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygonia similia quorum latera numero augerentur et longitudine minuerentur in infinitum, ita ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum a circulo differentia foret quavis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema, licet non adverterent vete-

ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (<sup>o</sup>) summarum et rationum deucere; et propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; et principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium (<sup>p</sup>) determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (<sup>q</sup>) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum et

res. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti a circulo quâvis datâ minore componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longius progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalieri, qui anno 1633, indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, et solida ex infinitis superficiebus; deinde indivisibilia illa elementa, totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, et sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis duior minusque geometrica Newtono visa est.

(n) 137. NEWTONUS, ut indirectas et perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem et evidentiam conservaret, veterum principium lemme primo generaliter expressit, illudque in lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, et inde directas perbrevesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium breviter assequeretur, tutius tamen et ac-

curatius procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, et quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, et solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, et sic in cæteris.

(o) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, et eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam potest esse major areâ curvilineâ, sed hæc area est terminus ad quem parallelogrammorum decrescientium summa semper accedit et quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescent aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam et definitam parvitatem obtineant. Quascumque enim portiunculas linearum, superficierum aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæc semper reipsâ finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intrâ certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, unde hæc quantitates semper ut decrescentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140 Exempli causâ, gravis sursùm projecti et ad altissimum locum pervenientis.

quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quâcum evanescent. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima et ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motûs attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis

(\*) 141. Seu, quantitatum determinatarum et indivisibilium, sed, &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes et proprietates et lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facillè intelligitur quænam proprietates quantitativis illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeoque et cum in infinitum minuuntur et evanescent, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licet quantitativis finitis non conveniant, evanescentibus tamen et nascentibus competunt, cum nempe quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates, ut ita dicam perpetuò accedunt, et ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

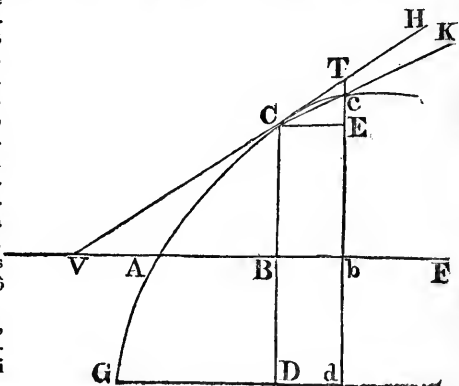
Ex præcedentibus Lemmatibus facillè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eadem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ita progrediantur, ut ordinatâ B D, eadem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, et interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, aræ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes et crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt ma-

jores vel minores; si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, et methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, *methodus fluxionum inversa* appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitas tum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes.—*Dem.* Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis, v. gr. in C, et c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio



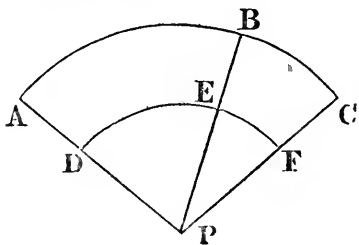


rat in T et V; linea b c in locum suum priorem B C redeat, et ultima forma triangulorum evanescentium C E c, C E c, C E T, est similitudinis et ultima ratio æqualitatis (*Lem. VIII.*) ideoque fluxiones primæ ipsarum A B, B C, A C, sunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, et C T, et per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est, per latera V B, C B, et V C, trianguli V B C, similis triangulo C E T.

151. Quoniam aræa B b c C, B b d D, eodem tempore describuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt aræa illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); sed area nascentis B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergo fluxiones arearum A C B, A B D G, sunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d nascentium, seu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B D.

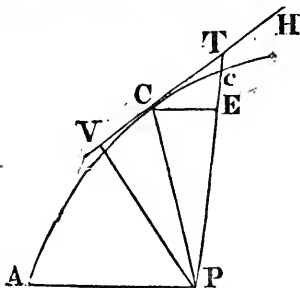
152. Si circulus centro B, radio fluente B C, descriptus per longitudinem abscissæ A B, ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circa axem A B generaretur, et fluxio solidi geniti erit ut factum ex aræa circuli illius in incrementum nascentis B b, abscissæ A B, et fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, nascentem.—*Dem.* Rectangulum nascentis B E, non differt a figurâ B b c C nascente (107), adeoque incrementum nascentis solidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli B E, circa latus B b, genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex aræa circuli radio C B descripti in altitudinem B b; solidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum nascentis adeoque et ipsius fluxio (146) est ut factum ex aræa circuli in incrementum nascentis B b, abscissæ A B. Similiter cum arcus nascentis C c, cum tangente C T coincidat, (*Lem. 7.*) superficies nascentis ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis est superficiei coni truncati, adeoque æqualis facto ex semisummâ peripheriarum, quarum sunt radii B C, b c, in latus C T, seu ob, b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum C T, nascentem; ergo factum istud est incrementum nascentis superficiei curvæ ex rotatione A C descriptæ, adeoque est ut illius superficiei fluxia (146) Q. e. d.

153. Anguli rectilinei A P B, E P F sunt



inter se directè ut arcus A B, E F, qui angulos subtendunt et reciprocè ut arcum radii A P, E P.—*Dem.* Est angulus A P B, ad angulum B P C, seu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeoque ut A B : A P, ad B C : A P; sed ob arcus similes B C, E F, est B C : A P = E F : E P; ergo angulus A P B, est ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. d.

154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi posse arcu A B qui ipsum subtendit diviso per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, esse ut factum ex angulo A P B in radium A P, atque adeo hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascentis anguli fluentis A P B, adeoque et illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcûs circularis nascentis et inversâ radii illius.



155. Recta P C fluens circa datum polum P revolvatur, et punctum illius extremum C, curvam A C c, describat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demissa sit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C fixum, progrediaturque recta P C de loco suo P C, in locum novum P c, et producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, seu radio P C describatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ, A c, P C c, incrementum arææ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum suum priorem P C, ut incrementa illa omnia evanescant et horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evanescentia sunt ultimò similia et æqualia (*Lem. 8.*) circuli arcus C E, cum chordâ ipsius coincidit, ipsique æqualis est (*Lem. 7.*), et præterea evanescente angulo C P E, anguli P C E, P E C, sunt inter se et duobus rectis æquales, adeoque C E, ad P T, normalis. Manifestum est, 1°. Triangulum T V P esse triangulo T E C, adeoque et triangulo evanescenti c E C, simile, ac proinde fluxiones arcûs A C, et rectæ P C, esse inter se ut duo latera V T, T P seu V C, P C. 2°. Fluxionem anguli A P C, esse ut C E : P C (154).—3°. Fluxionem arææ A C P, esse ut factum ex rectâ C P, in normale C E evanescentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectæ

tangulo P T X C E, seu ob evanescen-  
tem E T, dimidio rectangulo P C X C E  
(Lem. 1.)

157. Similibus argumentis ex fluentibus cal-  
culo expressis fluxiones inveniri possunt, in quan-  
titatibus finitis analysim instituendo, et finitarum  
nascentium vel evanescentium rationes primas  
vel ultimas investigando. Hæc autem sunt cal-  
culi fluxionum principia. Nimirum, 1<sup>o</sup>. Cum  
fluxiones sint in primâ ratione incrementorum  
nascentium et ultimâ evanescentium (146), fluxi-  
ones iis incrementis primò nascentibus vel ulti-  
mò evanescentibus possunt exprimi.—2<sup>o</sup>. Quan-  
titates quæ nonnisi suo incremento nascente aut  
evanescente differunt, sunt æquales (Lem. 1.)—  
3<sup>o</sup>. Quantitatum constantium nullæ sunt fluxio-  
nes, nulla incrementa vel decrementa.—4<sup>o</sup>. Si in-  
ter quantitates indeterminatas aliquæ decre-  
scant, dum aliæ crescunt, decrescientium fluxiones sunt  
negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu  
ut decrementa.

158. Quantitates fluentes designantur ultimis  
alphabeti litteris  $z, y, x, v$ ; constantes indican-  
tur aliis  $a, b, c$ , &c. fluentium fluxiones primas  
aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel  
evanescentia NEWTONUS notat iisdem litteris qui-  
bus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic  
 $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ ; Leibnitius litteram  $d$ , incrementi  
nascentis vel evanescentis notam characteristicam  
fluentibus præponit sic  $dz, dy, dx, dv$ . Fluxiones  
secundæ designantur sic  $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$ , vel sic  $ddz,$   
 $ddy, ddx, ddv$ ; fluxiones tertiæ sic  $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$ ,  
vel sic  $dddz, dddy, dddx, dd dv$ , vel sic  $d^3z, d^3y,$   
 $d^3x, d^3v$ , et ita deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis  
per additionem vel subtractionem compositæ,  
æqualis est omnibus singulorum terminorum  
fluxionibus per eadem signa + vel - junctis;  
itâ fluxio quantitatis compositæ  $a + z - y$ , erit  
 $d z - d y$ .—Dem. Totius quantitatis  $a + z - y$ ,  
incrementum tempore dato genitum æquale  
est differentiæ incrementorum ipsarum  $z$  et  $y$ ,  
cum nullum sit constantis  $a$ , incrementum (156)  
adeoque incrementum nascentium vel evanescentium  
ipsarum  $z$  et  $y$ , sed fluxiones sunt in primâ rati-  
one incrementorum nascentium (145) ergò fluxio  
totius quantitatis  $a + z - y$ , est  $d z - d y$ . Q. e. d.  
Si crescente quantitate  $z$ , decresceret  $y$ , ipsius  
 $y$ , fluxio foret negativa nempe  $-d y$  (157)  
adeoque fluxio  $d z - d y$ , fieret  $d z + d y$ .  
Quod in sequentibus semper est obser-  
vandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus  
variabilibus per multiplicationem compositæ,  
æqualis est summæ factorum ex singularum vari-  
abilium componentium fluxionibus in aliarum vari-  
abilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis  
 $z y$ , est  $d z y + y d z$ , fluxio quantitatis  $a z$  est  
 $a d z$ , fluxio quantitatis  $z y x$  est  $y x d z + z x d y$   
 $+ z y d x$ .—Dem. Recta C B, fluens super

rectâ A B cui norma-  
lis est, progrediat, il-  
liusque punctum extre-  
mum C, describat cur-  
vam A C c, perveniat  
B C in locum b c, et  
compleantur rectangu-  
la B F, b f, B E, C f,  
E G; A B, dicatur  $z$ ,  
B C dicatur  $y$ , adeoque  
rectangulum B F erit  
 $z, y$ . Dum B C, per-  
venit in b c, incrementum rectanguli B F seu  
 $z y$ , æquale est summæ rectangulorum B E,  
E G, C f; est autem rectangulum E G, ad rectan-  
gulum E B, ut E c ad B C, et ad rectangulum  
C f ut C E, vel B b, ad A F C, seu A B; quare  
redeunte b c, in locum suum priorem B C, et  
decrescitibus continuò E c, et E C atque tand-  
em ultimò evanescentibus, decrescit quoque et  
tandem evanescit, seu fit inassignabilis ratio rec-  
tanguli E G, ad rectangula E B et C f; adeoque  
(Lem. 1.) summa duorum rectangulorum B E,  
C f, fit ultimò æqualis summæ trium rectangu-  
lorum B E, E G, C f; ergò incrementum nas-  
centis rectanguli B F, seu  $z y$ , æquale est summæ  
duorum rectangulorum B E, C f, nascentium,  
seu summæ factorum ex  $z$ , in incrementum nas-  
centis ipsius  $y$ , et ex  $y$ , in incrementum nascentis  
ipsius  $z$ , adeoque fluxio facti  $z y$  (146) est  $d z y$   
 $+ y d z$ . Unde etiam fluxio  $a z$  est  $a d z$ , quia  $a$ ,  
constans nullam habet fluxionem. Q. e. d.

Jam in facto  $z y x$  ponatur  $z y = v$ , et erit  $z X$   
 $y x = v x$ , adeoque fluxio facti  $z y x$  æqualis  
fluxioni facti  $v x$ ; fluxio autem facti  $v x$ , est  $d v$   
 $+ v d x$ , et fluxio facti  $z y = v$ , est  $d z y + y d z$   
 $= d v$ , id est si in fluxione  $x d v$ ,  $+ v d x$ , pro  
 $v$  et  $d v$  substitueris  $z y$ , et  $d z y + y d z$ , fluxio  
facti  $z y x$ , nempe  $x d v + v d x$ , erit  $x d z y +$   
 $y x d z + y y d x$ ; et par est ratio aliorum fac-  
torum quorumcumque. Q. e. d.

161. Cor. 1. Ponantur singulæ fluentes  $z, y$ ,  
 $x$ , &c. sibi mutuò semper æquales et ipsius  $z, y$ ,  
fluxio erit  $d z z + z d z = 2 z d z$ : fluxio cubi  
 $z^3$  erit  $3 z^2 d z + z^2 d z + z d z = 3 z^2 d z$   
 $= 3 z^3 - 1 d z$ : fluxio potentie  $z^4$  erit  $4 z^3 d z$   
 $= 4 z^4 - 1 d z$ : et eodem argumento fluxio  
potentie cujuscumque  $z^m$  erit  $m z^{m-1} d z$ .

162. Cor. 2. Fluxio quantitatis  $z^{\frac{1}{2}}$ , est  
 $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1} d z = \frac{d z}{2 z^{\frac{1}{2}}}$  nam ponatur  $z^{\frac{1}{2}} = y$   
et erit  $z = y y, d z = 2 y d y$  (161)  $d y =$   
 $d (z^{\frac{1}{2}}) = d z : 2 y = d z : 2 z^{\frac{1}{2}}$  et generaliter  
fluxio quantitatis  $z^m$  est  $\frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} d z = \frac{m}{n} X$   
 $z^{\frac{m}{n}-1} d z$ .

163. Cor. 3. Fluxio fractionis  $z : y$  seu  $z y^{-1}$   
est  $y d z - z d y : y y$ . Nam fiat  $z : y = x$ ,  
erit  $z = y x, d z = y d x + x d y$  et  $d x = d z :$   
 $y - x d y : y = d z : y - x d y : y y = y d z - x d y :$   
 $y y$ : fluxio quantitatis  $a z^m y^n$  est  $a m y^n z^{m-1}$   
 $d z + a n z^m y^{n-1} d y$  (160.)

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis erunt. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias et sequentes, convenit, quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, et pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò et sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis  $y d y : d x$ , supponendo quantitatem  $x$  uniformiter fluere, adeoque  $d x$  constantem seu  $= 1$ , invenitur fluxio  $y d d y + d y^2 : d x$ .

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quare, litterâ  $S$ , significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu, sammam primam incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentates formulæ erunt.

1.  $S. d z = z$ . et  $S. a d z = a z$ .  $S. d z : a = z : a$ .

2.  $S. m z^m - 1 d z = z^m$ ,  
et  $S. m a z^m - 1 d z = a z^m$ ,

et  $S. \frac{m}{n} z^m - n : n d z = z^m : n$ .

3.  $S. (d z + d y) = z + y$ .

4.  $S. (z d y + y d z) = y z$ .

et  $S. (a m y^n z^{m-1} d z + a n z^m y^{n-1} d y) = a z^m y^n$ .

5.  $S. (y d z - z d y) : y y = z : y$ .

166. Si fluxio, cujus fluens quæritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpè reduci potest. Sit in exemplum fluxio  $c b + c x \frac{1}{2} \times d x$ , ponatur  $c b + c x \frac{1}{2} = z$  et erit  $c b + c x = z z$ , et  $c d x = 2 z d z$ , et  $d x = \frac{2 z d z}{c}$

adeoque  $c b + c x \frac{1}{2} \times d x = 2 z z d z : c$ . Hæc autem fluxio similis est formulæ  $m a \times z^m - 1 d z$ , estque  $z^2 = z^m - 1$ , adeoque  $m = 3$ ,  $m a = 3 a = 2 : c$ , et  $a = 2 : 3 c$ , adeoque  $S. m a z^m - 1 d z = a z^m = 2 z^3 : 3 c$  loco  $z$ , scribatur ipsius valor  $c b + c x \frac{1}{2}$ , et invenietur  $S. c b + c x \frac{1}{2} \times d x = \frac{2}{3 c} (c b + c x) \times c b + c x \frac{1}{2} = \frac{2}{3} (b + x) \times c b + c x \frac{1}{2}$ .

167. Superiorum formularum auxilio et fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ, &c. inveniuntur. Exempla sint  $S. d d x = d x$ .  $S. d x. d d x = \frac{1}{2} d x d x = \frac{1}{2} d x^2$ . Nam ponatur  $d x = y$ , et erit  $d d x = d y$ , et  $d x d d x = y d y$ ,

et per formulam secundam invenitur  $S. y d y = \frac{1}{2} y y$ , et si loco  $y$  substituaturs ipsius valor,  $d x$ , erit  $S. y d y = S. d x d d x = \frac{1}{2} d x^2$ . Similiter.  $S. (d y^2 + y d d y) : d x = y d y : d x$ , supponendo  $d x$  constantem, nam fiat  $d d y = d v$ , adeoque  $d y = v$ , et fluxio proposita evadet,  $v d y + y d v : d x$ , cujus fluens (per formulam 4<sup>am</sup>) est  $v y : d x$ , ob  $d x$  constantem. Cum autem sit  $v = d y$ , erit  $v y : d x = y d y : d x$ .

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, et cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam et fluens pro lubitu assumi potest, et assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, et terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, et eadem proinde fluxio  $d z$  ex fluentibus  $z$ , et  $z + a$ , colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens  $\frac{2}{3} (b + x) \times \frac{b c + c x \frac{1}{2}}{c}$ , quæ (166) deducta est ex fluxione  $c b + c x \frac{1}{2} \times d x$ , ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis  $x$ , ponitur  $o$ ; tum si fluens ipsa sit etiam  $o$ , completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet  $+\frac{2}{3} b \sqrt{b c}$ , hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa,  $\frac{2}{3} (b + x) \times \frac{b c + c x \frac{1}{2}}{c} - \frac{2}{3} b \sqrt{b c}$ . Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere arcam curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis  $x$ , adeo ut dum  $x = o$ ; area, fluente expressâ, sit etiam  $o$ ; unde si in fluente primò inventâ loco  $x$ , substituaturs  $o$ , sitque aliquid residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.







descriptorum chordæ  $AB$ ,  $BC$  ac  $DE$ ,  $EF$  compleantur in parallelogramma  $ABCU$ ,  $DEFZ$ ; vires in  $B$  et  $E$  sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium  $BU$ ,  $EZ$ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus  $BC$  et  $EF$  componuntur (per legem Corol. 1.) ex motibus  $Bc$ ,  $BU$  et  $Ef$ ,  $EZ$ : atqui  $BU$  et  $EZ$ , ipsi  $Cc$  et  $Ff$  æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in  $B$  et  $E$ , ideòque sunt his impulsibus proportionales.

*Corol. 4.* Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistantibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbés curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, et chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (<sup>d</sup>) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in Corollario tertio.

*Corol. 5.* Ideoque vires eadem sunt ad (<sup>e</sup>) vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

*Corol. 6.* Eadem omnia obtinent per legem Corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unâ cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

$ASB$ ,  $BSC$ , &c. última perimeter  $ABCD$   $EF$ , sit linea curva quam (113) rectæ  $A c$ ,  $B d$ ,  $C e$ ,  $D f$  tangunt in punctis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendicula à centro  $S$ , in tangentes demissa.

(<sup>e</sup>) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ  $BV = Ce$ , erit  $VC$ , æqualis et parallela lineæ  $Bc$ , seu  $AB$ , adeòque  $VA$ ,  $BC$ , erunt etiam æquales et parallelæ, et  $BV$ , quæ producta transit per centrum  $S$ , erit diagonalis parallelogrammi  $ABCV$ .

174. Si ducantur per puncta quævis  $B$ , et  $D$ , perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentés  $Bc$ ,  $De$ , et demittantur angulorum contactuum subtensæ  $Cc$ ,  $Ee$ , radii  $SB$ ,  $SD$ , ad

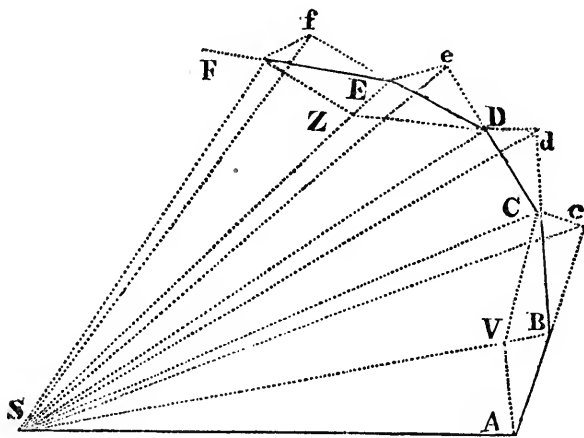
centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus  $BC$ ,  $DE$ , æqualibus temporibus descripti, patet ex Corollario 3. vires centripetas in  $B$  et  $D$ , esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum  $Cc$ ,  $Ee$ .

(<sup>d</sup>) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium  $BV$ ,  $EZ$ , diagonales enim  $AC$ ,  $DF$ , quæ sunt chordæ arcuum evanescentium  $AB C$ ,  $DE F$ , alias diagonales  $BV$ ,  $EZ$ , bisecant.

(<sup>e</sup>) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit, et gravia obliquè projecta parabolas describunt (40), quod etiam in figurâ superiori contingeret, si centrum virium  $S$ , in infinitum abiret, et vis centripeta in omnibus punctis  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , eadem maneret.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, et radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.*



*Cas. 1.* Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, et cogitur triangula quam minima  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCD$ , &c. circa punctum immobile  $S$  temporibus æqualibus æqualia describere, <sup>(f)</sup> agit in loco  $B$  secundum lineam parallelam ipsi  $cC$  (per Prop. XL. lib. 1. Elem. et Leg. 11.) hoc est, secundum lineam  $BS$ ; et in loco  $C$  secundum lineam ipsi  $dD$  parallelam, hoc est, secundum lineam  $SC$ , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile  $S$ . Q. e. d.

<sup>(f)</sup> 177. Agit in loco  $B$ , secundum lineam parallelam ipsi  $cC$ , hoc est, secundum lineam  $BS$ ; nam solâ vi insitâ in  $A$ , corpus uniformi cum motu progredieretur per rectam  $ABc$ , et æqualibus temporibus æquales lineas  $AB$ ,  $Bc$ , describeret; verum per vim centripetam in  $B$ , detorquetur a rectâ  $Bc$ , ut aliam rectam  $BC$ , eodem tempore describat quo descripsisset  $Bc$ ; adeoque junctâ  $Cc$ , vis centripeta agit in  $B$ , secundum directionem parallelam ipsi  $Cc$  (per Coroll. 1. Leg.) sed ob  $AB = Bc$ , et ob tri-

angulum  $SBC$ , æquale triangulo  $SAB$ , (per hyp.) erit triangulum  $SAB = \text{triang. } SBC = \text{triang. } SBC$ , adeoque per Prop. 40. vel 39. Lib. 1. Elem. communis triangulorum  $SBC$ ,  $SBC$  æqualium basis  $BS$ , parallela est rectæ  $Cc$ , quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonstrata, vis centripeta in  $B$ , agat secundum directionem parallelam lineæ  $Cc$ , necessum est ut agat secundum directionem rectæ  $BS$ , hoc est, ut tendat ad centrum  $S$ .

*Cas. 2.* Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est, sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ descriptâ, et puncto suo S uniformiter in directum.

*Corol. 1.* In spatiis vel mediis non resistentibus, si aræe non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radorum; (<sup>g</sup>) sed indè declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

*Corol. 2.* (<sup>h</sup>) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radorum versus plagam, in quam fit motus.

*Scholium.*

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. (<sup>i</sup>) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, et propterea in compositione virium negligenda est.

### PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud altcrum, et ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.*

(<sup>k</sup>) Sit corpus primum L, et corpus alterum T: et (per legum

(<sup>g</sup>) 178. Sed indè declinant in consequentia, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia. Nam si triangulum S B C, æquale non est triangulo S A B, seu S B c, eodem tempore descripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, sed producta cum lineâ S B, ita converget ut tendat in plagam motûs, si triangulum S B C, triangulo S B c, majus est, et tendat in plagam contrariam si triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quare vis centripeta in B, agens secundum directionem parallelam lineæ C c, in primo casu declinat in consequentia, in secundo casu declinat in antecedentia.

(<sup>h</sup>) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum de-

scriptionem etiam sublatâ mediî resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radorum, in S, versus plagam in quam fit motus.

(<sup>i</sup>) 180. Porro si vis illa perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, et corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiæ descriptæ quantitatem auget nec minuit, et propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

(<sup>k</sup>) 181. Corpus L, circâ alterum T, in curvâ A L B, ita revolvatur, ut circâ illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundum directionem T Q, et per



terum T vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum : actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla est, vel miscetur et componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium : visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur ; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

*Scholium.*

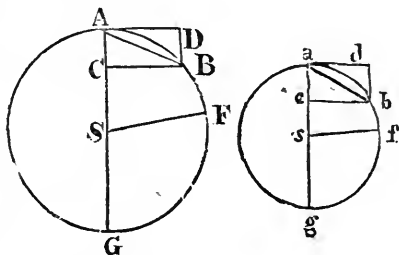
Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur a motu rectilineo, et in orbita sua retinetur ; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur ?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere ; et esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios.*

(<sup>1</sup>) Tendunt hæ vires ad centra circularum per Prop. II. et Corol. 2. Prop. I. et sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis descriptorum sinus versi per Corol. 4. Prop. I. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per Lem. VII. et propterea,

(<sup>1</sup>) 182. Corpora duo A et a, circulos ABGA, a b g a, æquabili motu describant, et areæ seu sectores A S F, F S G, et a s f, f s g, erunt in singulis circulis ut arcus A F, F G, et a f, f g ; hoc est (<sup>5</sup>) ut tempora quibus describuntur, ac proinde vires quibus corpora A et a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad centra S et s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis descripti, et ductis tangentibus A D, a d, et ad eas perpendicularibus B D, b d, completisque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A et a, erunt inter se ut rectæ D B, d b, seu ut sinus versi A C, a c, (174). Verùm ductis chordis A B, a b, est A C : A B = A B : A G, et a c : a b = a b : a g, unde  $A C = \frac{A B^2}{A G}$ , et  $a c = \frac{a b^2}{a g}$  ; cum igitur chordæ et arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc est, vis



centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcus evanescentis A B diametro A G divisum, ad quadratum arcus evanescentis a b, diametro a g, divisum et propterea cum hi arcus, &c.

cùm hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, et diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. e. d.

*Corol. 1.* Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, et ratione simplici radiorum inversè. (<sup>m</sup>)

*Corol. 2.* (<sup>n</sup>) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione velocitatum inversè; (<sup>o</sup>) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

*Corol. 3.* (<sup>p</sup>) Unde si tempora periodica æquantur, et propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: et contra.

*Corol. 4.* (<sup>q</sup>) Si et tempora periodica, et velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (<sup>r</sup>) æquales erunt vires centripetæ inter se: et contra.

*Corol. 5.* (<sup>s</sup>) Si tempora periodica sint ut radii, et propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: et contra.

(<sup>m</sup>) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriâ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(<sup>n</sup>) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè et ratione velocitatum inversè. Nam (<sup>5</sup>) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proinde tempora periodica sunt ut radii directè et velocitates inversè. Si corporum A et a, tempora periodica dicantur T et t, celeritates C et c, radii A S, a s, dicantur R et r, erit  $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$  idèoque  $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ .

(<sup>o</sup>) 185. Vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A et a, dicantur V et v, erit (per Coroll. 1.)

$$V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ sed quoniam (184) } C : c =$$

$$\frac{R}{T} : \frac{r}{t}, \text{ adeoque } C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} \text{ erit}$$

$$\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} \text{ ergò } V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$$

$$= t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}.$$

(<sup>p</sup>) 186. Undè si tempora periodica æquantur

et propterea (<sup>184</sup>) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (<sup>185</sup>)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , si  $T^2 = t^2$ , erit  $V : v = R : r$ .

Et contrà si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (<sup>185</sup>)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , si ponatur  $V : v = R : r$ , erit  $R : r = t^2 R : T^2 r$ , unde  $t^2 R = R T^2$ , adeoque  $t^2 = T^2$ , et  $t = T$ .

(<sup>q</sup>) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eadem ratione. Nam (<sup>184</sup>)  $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$  a-

$$\text{deoque } C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}. \text{ Undè si fuerit}$$

$$T : t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}} \text{ ac proinde } T^2 : t^2 = R : r, \text{ erit } C^2 : c^2 = R : r.$$

Et contrà si fuerit  $C^2 : c^2 = R : r$ , erit  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : r$ , adeoque  $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$ , et  $R t^2 = r T^2$ , unde  $T^2 : t^2 = R : r$ .

(<sup>r</sup>) 188. Si et tempora periodica ac proinde velocitates (<sup>187</sup>) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (<sup>185</sup>)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , si ponatur  $T^2 : t^2 = R : r$ , erit  $t^2 R = T^2 r$ , unde  $V = v$ .

Et contrà si  $V = v$ , cum sit (<sup>185</sup>)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , erit  $t^2 R = T^2 r$ , et proinde  $T^2 : t^2 = R : r$ .

(<sup>s</sup>) 189. Si tempora periodica sunt ut radii et propterea (<sup>184</sup>) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciproce ut radii. Quoniam



*Corol. 6.* <sup>(t)</sup> Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radorum, et propterea velocitates reciproce in radorum ratione subduplicatâ; <sup>(u)</sup> vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radorum: et contra.

*Corol. 7.* Et universaliter, si <sup>(x)</sup> tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet  $R^n$ , et propterea velocitas reciproce ut radii potestas  $R^{n-1}$ ; <sup>(y)</sup> erit vis centripeta reciproce ut radii potestas  $R^{2n-1}$ : et contra.

*Corol. 8.* <sup>(z)</sup> Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, et viribus,

enim (per Coroll. 1.)  $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$  si  $C^2 = c^2$ , erit  $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$ .

Et contrâ si fuerit  $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$ , cum sit (Coroll. 1.)  $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$  erit  $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ , adeoque  $C^2 = c^2$ , et  $C = c$ .

<sup>(t)</sup> 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radorum, erunt velocitates reciproce in ratione radorum subduplicatâ; nam quoniam (184)  $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ , adeoque  $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$  si fuerit  $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$ ,

erit  $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$ .

Et contrâ si fuerit  $C^2 : c^2 = r : R$ , erit  $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r : R$ ; adeoque  $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$  et  $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$ .

<sup>(u)</sup> 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radorum et propterea <sup>(190)</sup> velocitates reciproce in radorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radorum. Nam cum sit (185)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ ; si fuerit  $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$ , erit  $V : v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$ .

Et contrâ si  $V : v = r^2 : R^2$ , erit (185)  $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$  ac proinde  $t^2 R^3 = T^2 r^3$ ; et  $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$ .

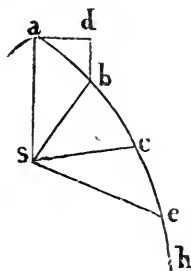
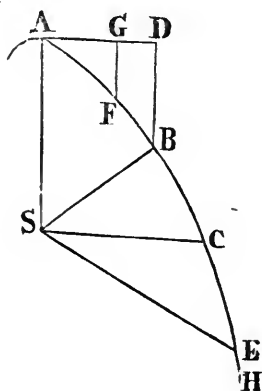
<sup>(x)</sup> 192. Si tempora periodica sint ut radorum potestates quælibet  $R^n, r^n$ , velocitates erunt reciproce ut radorum potestates  $R^{n-1}, r^{n-1}$ . Nam ponatur  $T : t = R^n : r^n$ , et quoniam (184)  $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ , erit  $C : c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}$ .

Et contrâ si fuerit  $C : c = r^{n-1} : R^{n-1}$ , erit  $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$ , adeoque  $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$ , undè  $R^n : r^n = T : t$ .

<sup>(y)</sup> 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radorum potestates quælibet  $R^n, r^n$  et propterea <sup>(192)</sup> velocitates reciproce ut radio-

rum potestates  $R^{n-1}, r^{n-1}$ , erunt vires centripetæ reciproce ut radorum potestates  $R^{2n-1}, r^{2n-1}$ . Nam ponatur  $T : t = R^n : r^n$  adeoque  $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$ ; et cum sit (185)  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , erit  $V : v = R r^{2n} : r R^{2n} = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ .

Et contrâ si fuerit  $V : v = r^{2n-1} : R^{2n-1}$ ; cum sit  $V : v = t^2 R : T^2 r$ , erit  $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R : T^2 r$ , adeoque  $t^2 \times R^{2n} = T^2 r^{2n}$ , undè  $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$ ; et  $T : t = R^n : r^n$ .



<sup>(z)</sup> 194. Corpora A et a, figurarum simili-

quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, et distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

um  $A B H$ ,  $a b h$ , centra  $S, s$ , in figuris illis similiter posita habentium, partes similes  $A B E$ ,  $a b e$ , itâ describant ut areæ  $A S B$ ,  $A S C$ , et cetera,  $a s b$ ,  $a s c$ , et cetera, circa centra  $S, s$ , in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivè proportionales, et per Prop. II. vires centripetæ ad centra  $S, s$ , tendent. Per puncta  $A$  et  $a$ , in curvis similiter posita agantur tangentes  $A D$ ,  $a d$ , sintque arcus minimi,  $A F$ ,  $a b$ , eodem tempore in utraque curvâ descripti, et ductis rectis  $F G$ ,  $b d$ , radiis vectoribus  $A S$ ,  $a s$ , parallelis, vis centripeta in  $A$ , est ad vim centripetam in  $a$ , ut  $F G$ , ad  $b d$ , (174). Sumatur autem arcus  $A B$  similis  $a b$ , (ita ut sita s:

$$A S = a b : A B, \text{ ac proinde sit } A B = \frac{a b \times A S}{a s},$$

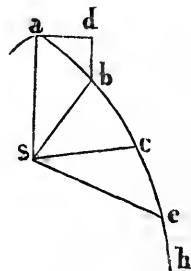
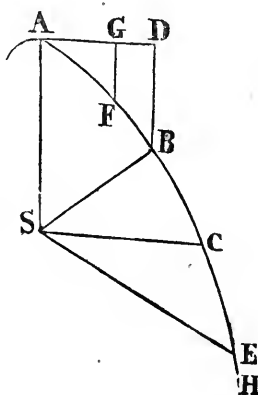
ducaturque  $B D$  radio  $A S$  parallela, erit per Coroll. I. Lem. XI.  $F G : B D = A F^2 : A B^2$ , et quia figuræ  $A B D$  et  $a b d$ , sunt similes, est

$$B D : b d = A B : a b, \text{ itaque per compositionem rationis est } F G : b d = \frac{A F^2 \times A B}{A B^2} \times a b = \frac{A F^2}{A B} \times a b \text{ (et quia } A B = \frac{a b \times A S}{a s} \text{)} = A F^2 : \frac{a b \times A S}{a s} \times a b = \frac{A F^2}{A S} :$$

$\frac{a b^2}{a s}$ . Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetas in  $A$  et  $a$ , esse inter se ut sunt  $G F$ ,  $b d$ , erunt vires illæ ut quadrata arcuum  $A F$ ,  $a b$ , simul descriptorum applicata ad radios homologos  $A S$ ,  $a s$ .

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum  $A$  et  $a$ , per arcus nascentes  $A F$ ,  $a b$ , sunt uniformes, erunt illæ ut arcus  $A F$ ,  $a b$ , æqualibus temporibus descripti (5). Undè vires centripetæ in  $A$ , et  $a$ , erunt ut velocitatum in  $A$  et  $a$ , quadrata, ad radios  $A S$ ,  $a s$  applicata.

196. Coroll. 2. Figuræ similes  $A S E$ ,  $a s e$ , divisæ concipiantur in innumeros sectores æquales  $A S B$ ,  $B S C$ , et cetera, et  $a s b$ ,  $b s c$ , et cetera, sibi mutuò in duabus figuris similes, et ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur, ac proinde arcus  $A B$ ,  $B C$ , et arcus  $a b$ ,  $b c$ , et cetera, æqualibus respectivè temporibus percurruntur: erit igitur tempus per  $A B$ , ad tempus per  $a b$ , ut tempus per  $A E$ , ad tempus per  $a e$ , hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes  $A B$ ,  $a b$ , sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus,  $A E$ ,  $a e$ , adeoque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in  $A$  et  $a$ , sint inter se ut arcus  $A B$ ,  $a b$ , ad sua respectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter se ut arcus  $A B$ ,  $a b$ , seu ob figurarum similitudinem, ut radii



$A S$ ,  $a s$ , ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondentibus  $A$  et  $a$ , sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum homologorum directè et ratione temporum periodicorum inversè, adeoque tempora periodica sunt ut radii directè et velocitates inversè.

197. Corol. 3. Celeritates in  $A$  et  $a$ , dicantur  $C, c$ , vires centripetæ  $V, v$ , radii vectores homologi  $R, r$ ; tempora periodica  $T, t$ , et erit (196)  $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ , et  $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ , et  $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} :$

*Coroll. 9.* <sup>(a)</sup> Ex eâdem demonstratione consequitur etiam, quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, et descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

$$\frac{r^2}{t^2}. \text{ Et quoniam (195) } V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r},$$

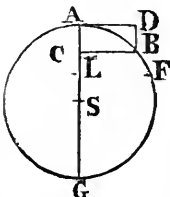
$$\text{erit } V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 : T^2 \quad R : T^2 \quad r =$$

$$\frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}, \text{ hoc est, vires centripetæ sunt}$$

reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cùm igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus et viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eâdem omnia convenire temporibus, velocitatibus, et viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

<sup>(a)</sup> 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, et idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò itâ urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, constans est et continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter accelerato cadit (25) et spatia percurta sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens A D, et sumpto arcu minimo A B, in tangentem demittatur perpendicularis B D, et compleatur rectangulum C D, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, seu A C, (ex Coroll. 3. Prop. 1<sup>a</sup>.) erit igitur A C, ad A L ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc est, ob motum in circulo æquabilem A C : A L = A B<sup>2</sup> : A F<sup>2</sup> = A B<sup>2</sup> : A F<sup>2</sup> ; cum igitur ob arcum nascentem A B, suæ chordæ æqualem, sit A C = A B<sup>2</sup>, erit quoque A L =  $\frac{A F^2}{A G}$  atque adeò A L × A G = A F<sup>2</sup> et proinde A L : A F = A F : A G.

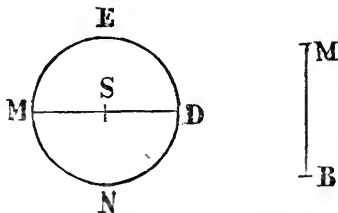
199. *Coroll. 1.* Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur equali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur : Nam sit A L



altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheria circuli describitur, sitque A F arcus eo tempore descriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 A L per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeoque erit A F = 2 A L siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper A F<sup>2</sup> = A L × A G (198) cum igitur sit 2 A L = A F ac proinde 4 A L<sup>2</sup> = A F<sup>2</sup> erit 4 A L<sup>2</sup> = A L × A G et 4 A L = A G et A L =  $\frac{A G}{4} = \frac{A S}{2}$ .

200. *Coroll. 2.* Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurrit, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam (199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percurta, sicut ut tempora (5) patet propositum.

201. *Coroll. 3.* Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ a centro distantia, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circâ prædictum centrum in datâ distantia circumulum uniformiter describat ; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam a centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, et datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, et arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. *Coroll. 4* Datis circuli radio et velocitate corporis in eo revolvantis, facile colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniat tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus

*Scholium.*

(<sup>b</sup>) Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius et Halleius) et propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum a centrīs, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis Propositionis et Corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex decensu gravium, et tempus revolutionis unius, et arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et (<sup>c</sup>) hujusmodi propositionibus

quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (50) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili M S clavo in S alligati, circâ centrum S uniformiter describat circulum M N D E, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolvētis celeritas quæ acquiritur a gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, et velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit  $\frac{2 M B}{T}$  (30), peripheria circuli dicatur p, et cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem  $\frac{2 M B}{T}$  applicatæ (5) erit id tempus periodicum  $\frac{p \times T}{2 M B}$ ; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium M S percurrit, sive  $p : M S = \frac{p \times T}{2 M B}$  ad tempus per dimidium radium quod est ideo  $\frac{T \times M S}{2 M B}$ . Cum autem grave tempore T altitudinē M B

sit emensum, et in motu uniformiter accelerato spatia percurra sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit  $T^2$  ad  $\frac{T^2 \times M S^2}{4 M B^2}$  seu  $4 M B^2$  ad  $M S^2$  ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore  $\frac{T \times M S}{2 M B}$ , quo corpus, M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit  $\frac{M S^2 \times M B}{4 M B^2}$  =  $\frac{M S^2}{4 M B}$  est igitur (15) vis centripeta in circu-

lo ad vim gravitatis ut  $\frac{M S}{2}$ , ad  $\frac{M S^2}{4 M B}$ , sive ut  $2 M B$  ad  $M S$ .

(<sup>b</sup>) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primum ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ distantiarum a centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquuplicatâ radiorum. Quare casus Corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciproce in ratione subduplicatâ radiorum, et vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata radiorum.

(<sup>c</sup>) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportionē 15. Theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in Corollariis Propos. hujusce IV. demonstravit NEWTONUS, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod postea perfecerunt multi insignes Mathematici.

Hugenius in eximio suo tractatu De Horologio Oscillatorio vim gravitatis cum revolvantium viribus centrifugis contulit.

(<sup>d</sup>) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quocunque. Et si corpus in polygona lateribus datâ cum velocitate movendo ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, et numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, et aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; et huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

(<sup>d</sup>) 205. Duo intelligantur polygona similia et regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant et longitudine minuantur in infinitum, et corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolvantium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum et quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentię impactuum aut reflexionum, itâ ut si eadem fuerit duorum corporum revolvantium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus et reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat et vice-versâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem et contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolvantium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates et numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygona eo tempore descriptorum. Por-

rò si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciproci ut latera singula, quoniam enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quare manente eadem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, et varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudes dato tempore descriptæ (5). Quare variantibus polygona velocitate et radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprâ ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem et contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis et numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, et etiam ut quadratum longitudinis seu arcus dato tempore descripti applicatum ad radium.

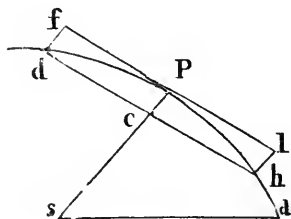
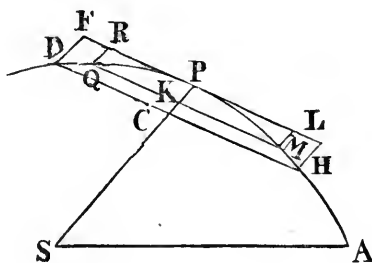


## PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

*Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, et arcum quemvis janjam nascentem tempore quam minimo describat, et sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, et producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè et tempus bis inversè.*

(<sup>f</sup>) Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. I.) et augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per Corol. 2. et 3. Lem. XI.) ideoque est ut vis semel et tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utriusque, et fiet vis ut sagitta directè et tempus bis inversè. Q. e. d.

(<sup>f</sup>) 207. Corpora P et p, circa virium centra S et s, revolvendo, curvas APQ, apq, describant, sintque chordæ minimæ DH, dh, radii vectoribus SP, sp, bifariam divisæ, et chordis illis evanescentibus, erit CH = PH, et DC = DP (per Corol. 2. Lem. VII.) adeoque PH = PD; undè puncta P et p, sunt in medio arcuum evanescentium DPH, dph, posita. Præterea quoniam punctis C et P, c et p, coeuntibus, puncta D et H, d et h, simul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evanescentium DH, dh, positio congruit cum tangentium FL, fl positione, ac proinde chordæ evanescentes DH, dh, tangentibus FL, fl, æquidistant, adeoque rectæ DF, df, radius SP, sp, parallelæ sagittis PC, pc, evanescentibus æquales sint. His, ad clariorem eorum quæ NEWTONUS supponit, intelligentiam positis, demonstrandum est vires centripetas in P et p, esse inter se ut sunt sagittæ PC, pc, directè, et inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes HPD, hpd, aut dimidii PD, pd. —Dem. Si arcus PD, pd, æqualibus temporibus describerentur, sagittæ PC, pc, (per Corol. 1. Prop. I.) essent ut vires centripetæ in P et p. Quòd si vires in P et p, æquales forent, tempora verò per arcus PD, pd, inæqualia, sint v. gr. sicut T ad t, dico sagittas PC, pc, fore ut horum temporum quadrata directè; sive ut T<sup>2</sup> ad t<sup>2</sup>. Sit enim arcus PQ, descriptus eodem tempore t quo arcus pd, positis viribus in P et p, æqualibus, spatia QR, fd, seu PK, pc, virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verùm (per Cor. 2. et 3. Lem. XI.) PD<sup>2</sup> : PQ<sup>2</sup> = DF : QR sive fd, et ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus PD, PQ ut tempora quibus describuntur, hoc est ut T ad t, ideoque PD<sup>2</sup> : PQ<sup>2</sup> = T<sup>2</sup> : t<sup>2</sup> = DF : QR sive fd, et quia DF = PC et df = pc ergo T<sup>2</sup> : t<sup>2</sup> = PC : pc, itaque si vires in P et p sint æquales, erunt sagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, describuntur.

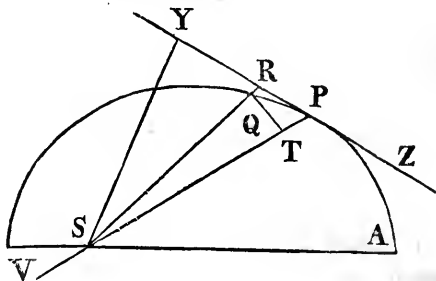


Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, et manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires et quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in P et p, dicantur V, v, erit PC : pc = V × T<sup>2</sup> : v × t<sup>2</sup>, et dividendo antecedentes per T<sup>2</sup>, et consequentes per t<sup>2</sup>, erit

$$V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}, \text{ Q. e. d.}$$

(\*) Idem facilè demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

*Corol. 1.* Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam A P Q; tangat verò recta Z P R curvam illam in puncto quovis P, et ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur Q R distantia S P parallela, ac demittatur Q T perpendicularis ad distantiam



illam S P: vis centripeta erit reciprocè ut solidum  $\frac{S P \text{ quad.} \times Q T \text{ quad.}}{Q R}$ ;

si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P et Q. <sup>(h)</sup> Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, et duplum trianguli S Q P sive S P  $\times$  Q T, temporis, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

*Corol. 2.* Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum  $\frac{S Y q \times Q P q}{Q R}$ , si modò S Y perpendicularum sit à centro virium in orbis tangentem P R demissum. <sup>(i)</sup> Nam rectangula S Y  $\times$  Q P et S P  $\times$  Q T æquantur.

*Corol. 3.* Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque ra-

(\*) 208. Idem facilè demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè: Cum enim F D, f d, seu sagittæ P C, p c, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes P D, p d, patet per suprâ dictum Coroll. vires centripetas esse inter se in ratione compositâ ex directâ ratione sagittarum P C, p c, et reciprocâ quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes P D, p c, seu H D, h d.

<sup>(h)</sup> 209. Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, <sup>(207)</sup> duplum verò trianguli evanescentis S Q P, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendicularo Q T, in

basim S P; cum igitur in eâdem curvâ A P Q, aræ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proinde rectangulum Q T  $\times$  S P, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut  $\frac{Q R}{S P^2 \times Q T^2}$  et inversè ut  $\frac{S P^2 \times Q T^2}{Q R}$ .

<sup>(i)</sup> 210. Rectangula S Y  $\times$  Q P, et S P  $\times$  Q T, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (per Lem. VII.) et propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, et S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quare area dupli trianguli S P Q, est S Y  $\times$  Q P = S P  $\times$  Q T.



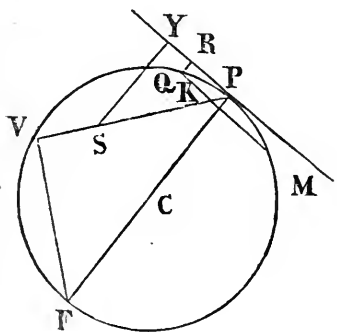
dium curvaturæ ad punctum P; et si P V chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta; erit vis centripeta reciprocè ut solidum

$$S Y q \times P V. \quad (k) \text{ Nam } P V \text{ est } \frac{Q R q.}{Q R}.$$

*Corol. 4.* Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, et chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprochè ut perpendicularum  $SY$  per Corol. 1. Prop. I.

*Corol. 5.* Hinc si detur figura quævis curvilinea  $A P Q$ , et in ea detur etiam punctum  $S$ , ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis  $P$  à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum  $\frac{S P q \times Q T q}{Q R}$  vel solidum  $S Y q \times P V$  huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

(\*) 211.  $P V$  est  $\frac{Q P^2}{Q R}$ . Sit enim circulus osculator  $P Q V F$ , et ductâ chordâ  $Q M$ , quam alia chorda  $P V$ , per virium centrum  $S$  acta, bi-



secat in K, erit (per Prop. 3<sup>a</sup>. Lib. 3. Elem.)  
 $QK^2 = VK \times PK$ ; sed evanescente PK,  
 $VK = VP$ , et (207)  $QR = PK$ , ac (per  
 Corol. 1. Lem. VII)  $QK = QP$ , ergo  $Q P^2 =$   
 $VP \times QR$ , et  $VP = \frac{Q P^2}{QR}$ .

212. Iisdem positis sit  $P C$ , radius osculi =  $R$ , et erit vis centripeta in  $P$ , reciprocè ut solidum  $\frac{S Y^3 \times R}{S P}$ : quoniam enim rectæ  $S Y$ , et

F C P, ad tangentem P Y, perpendiculares  
 æquidistant, erit angulus V P F = P S Y; cum-  
 que sit præterea angulus F V P, in semicirculo  
 aequalis recto S Y P, duo trianguia P V F,  
 S Y P, similia sunt ac proinde S P : S Y =  
 P F seu 2 R : P V, adeoque P V =  
 $\frac{S Y \times 2 R}{S P}$  et S Y  $\times$  P V =  $\frac{S Y^3 \times 2 R}{S P}$ ; hoc

est dividendo per numerum constantem 2, ut  
 $\frac{S Y^3 \times R}{S P}$ . Hæc est expressio vis centripetæ quam

Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre et  
Guido Grandus invenerunt.

*SCHOLION.*

213. NEWTONUS generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in Propositionibus viæ Corollariis tradidit. Plurimas per analysisim methodumque fluxionum postea exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet *Varignonius* qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate et universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit *Joannes Bernoullius* in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit *Jacobus Hermannus* in Scholio ad Propositionem 29<sup>am</sup> Lib. 1. *Phoronomie*, quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas, et ex superioribus NEWTONI formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.





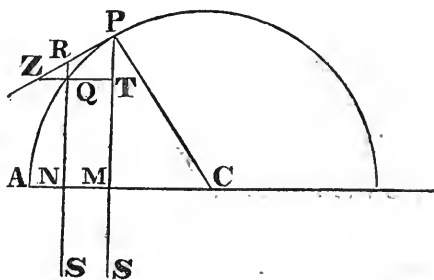




## PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

*Moveatur corpus in semicirculo P Q A : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes P S, R S ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A semicirculi centro C agatur semidiameter C A parallelas istas perpendiculariter secans in M et N, et jungatur C P. Ob (P) similia triangula C P M, P Z T et R Z Q est C P q ad P M q ut P R q ad Q T q, et naturâ circuli P R q æquale est rectangulo Q R



$\times \overline{RN + QN}$ , sive coëuntibus punctis P et Q rectangulo Q R  $\times 2 P M$ . Ergo est C P q ad P M quad. ut Q R  $\times 2 P M$  ad Q T quad. ideoque  $\frac{Q T \text{ quad.}}{Q R}$  æquale

$\frac{2 P M \text{ cub.}}{C P \text{ quad.}}$ , et  $\frac{Q T \text{ quad.} \times S P \text{ quad.}}{Q R}$  æquale  $\frac{2 P M \text{ cub.} \times S P \text{ quad.}}{C P \text{ quad.}}$ .

Est ergo (per Corollarium 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut  $\frac{2 P M \text{ cub.} \times S P \text{ quad.}}{C P \text{ quad.}}$ , hoc est (neglectâ ratione determinatâ  $\frac{2 S P \text{ quad.}}{C P \text{ quad.}}$ ) reciprocè ut P M cub. Q. e. i.

(q) Idem facillè colligitur etiam ex propositione præcedente.

*Scholium.*

(r) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in

(P) 222. Similia sunt triangula C P M, P Z T, anguli enim ad M et T recti æquales sunt, et quoniam anguli Z P T + M P C, et anguli M P C + M C P, recto æquantur, erit etiam M C P = Z P T; et  $P R^2 = Q R \times \overline{RN + QN}$  (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem C P sit radius circuli et S P sit linea infinita adeoque S M = S P, erunt C P, S P,  $\frac{2 S P^2}{C P^2}$  quantitates constantes.

(q) 223. Idem facillè colligitur ex Propositione præcedente quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut  $S P^2 \times P V^3$ . Nam, centro virium S in infinitum aßeunte, omnes S P sunt æquales adeoque constantes, et propterea vis reciprocè ut  $P V^3$ .

(r) 224. Ut multa de sectionibus conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoria vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Def. 1<sup>a</sup>. Si l'anum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni et istius Plani dicitur Sectio Conica.

2<sup>a</sup>. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicuntur primo casu Hyperbolæ, 2<sup>o</sup>. Parabolæ, 3<sup>o</sup>. Ellipses.

3<sup>a</sup>. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum e Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, et ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ Hyperbolæ oppositæ.

4<sup>a</sup>. Si secundum lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum Asymptoti; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni et quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit lineæ ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallele, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallele per Hyperbolam sectæ.

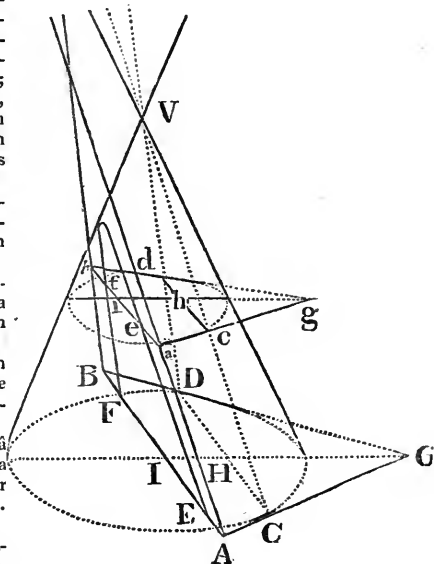
Si verò lineæ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductæ per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Ex si lineæ, inter se Parallele, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallele per Asymptotum sectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. et 16.)

Demonst. Primum talis sit lineæ A B ut planum per eam lineam duci possit basi conii parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus C E F D, ducatur planum V C D per verticem Coni V C D plano Hyperbolarum parallelum et secundum lineas V C, V D applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti et Tangentes circuli C E F D in punctis C et D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur lineæ G H I quæ erit perpendicularis in chordam C D camque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam A B, et chordam E F (per 3. 3. Elem.) est ergo I A = I B, et I E = I F unde I A — I E

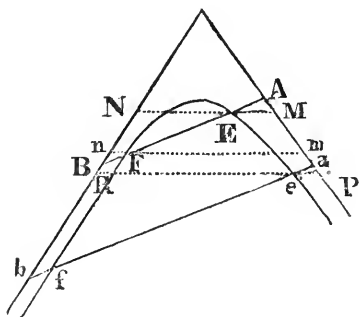
sive A E = I B — I F sive B F et (per 56. 3. Elem.)  $C A^2 = A F \times A E = A F \times B F$ .

Sit verò lineæ a b huic Parallela, sive in eadem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse  $a e = b f$ ; et  $c a^2 = a f \times a e = a f \times b f$ . Sed figura A C a c est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, et terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam C c et A a sunt sectiones plani Verticalis et plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, et C A et c a sunt sectiones planorum basi conii Parallelorum; est ergo C A = c a et  $C A^2 = c a^2$ , ac per consequens A F  $\times$  B F = a f  $\times$  b f.



Casus 2<sup>us</sup>. Quod si lineæ A B utcumque sit ducta inter Asymptotos, et Hyperbolam secet in E et F erit A E = B F; nam per E et F ducantur lineæ M E N, m F n, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela Triangula A E M et A F m, B F n et B E n erunt similia propter Parallelas, est ergo A E : A F = E M : F m et B E : B F = N E : n F; est ergo per compositionem rationis. A E  $\times$  B E : A F  $\times$  B F = E M  $\times$  N E : F m  $\times$  n F, sed per demonstrationem

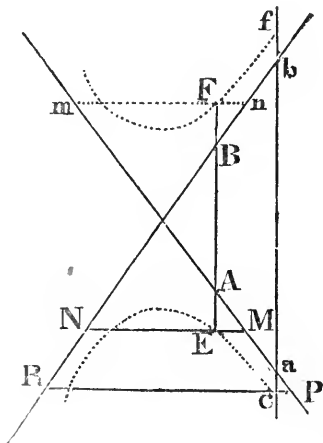
primi casus est  $EM \times NE = FM \times NF$ , ergo  $AE \times BE = AF \times BF$ , unde (per Prop. 16. 6. Elem.)  $AF : AE = BE : BF$  et dividendo  $AF - AE$  sive  $EF : AE = BE - BF$  sive  $EF : BF$ , cum ergo sit  $EF : AE = EF : BF$  est  $AE = BF$ .



Ducatur verò linea quævis a b, priori A B parallela, et per punctum e ducatur linea p c R linæ M E N parallela, similia erunt Triangula A E M et a e P, B E N et b e R ob parallelas, est ergo  $AE : ae = EM : eP$

et  $BE : be = EN : eR$ , est ergo per compositionem rationis...  $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : eP \times eR$ , sed per casum primum est  $EM \times EN = eP \times eR$ , ergo  $AE \times BE = ae \times be$ .

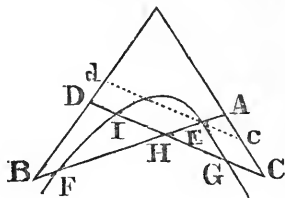
Casus 3<sup>us</sup>. Si linæ de quibus agitur, ab unâ



Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur et per Asymptotas searentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2<sup>o</sup>. casu, nisi quod

in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

*Lemma II.* Sint duæ linæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ linæ sumptarum a puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.

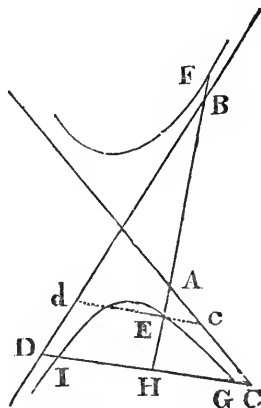


Linæ A B, D C sibi mutuo occurrant in H, est  $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$ .

*Demonstr.* Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam A B productam si necesse sit, linea c E d, alteri linæ datæ C H D Parallela: similia erunt Triangula A H C et A E c, B H D et B E d: unde habebuntur hæ proportionēs

A H sive A E + E H : A E = H C sive C G + G H : c E

et B H sive B F + F H : B E = H D sive D I + I H : d E, et per compositionem rationis  $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$  (sive A E per Lem. I.) +  $EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$  (sive C G per Lem. I.) +  $GH \times$



I H : c E  $\times$  d E (sive C G  $\times$  D G per Lem. I.) est verò B F + F H + H E = B E, et D I



$+IH + HG = DG$  ergo est  $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$ . et dividendo:  $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$   
ergo alternando  $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$ .

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium, etc.

*Lemma III.* Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secantur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum a curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum a curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.

Sint  $AB, CD$ , parallelæ sectæ per lineam  $EF$  in punctis  $G$  et  $H$ , est  $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$ .

Sit  $V$ , vertex conî, ex eo ducantur  $VE, VF$  ad extremitates lineæ  $EF$ ; ducatur in  $BA$ , planum  $VAB$ , per verticem conî transiens et in  $CD$  planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano  $VBA$  ducatur  $VG$ , et in  $H$ ,  $HM$  ipsi  $VG$  parallela quæ jacebit in plano Hyper-

$\sqrt{G}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$ .

Lineæ  $VE, VF$  ductæ per verticem conî et punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie conî, ergo earum intersectiones  $I$  et  $M$  cum lineâ  $HM$  in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint  $TN, TP$  parallelæ lineis  $VA, VB$ ; per punctum  $I$  in quo lineâ  $HM$  occurrit Hyperbolæ ducatur  $SIR$  lineis  $DC$  et  $AB$  parallela, similia erunt Triangula  $VAG$  et  $LRI, VBG$  et  $KSI$  lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

et  $VG : GB = KI : SI$  et per compositionem rationis

$\sqrt{G}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$  ( $= PD \times DN$  per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$  est ergo

$\sqrt{G}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$  et alternando

$\sqrt{G}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH$ .

Erat autem  $\sqrt{G}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$ , ex primâ demonstrationis parte, est ergo  $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$ . Q. e. d.

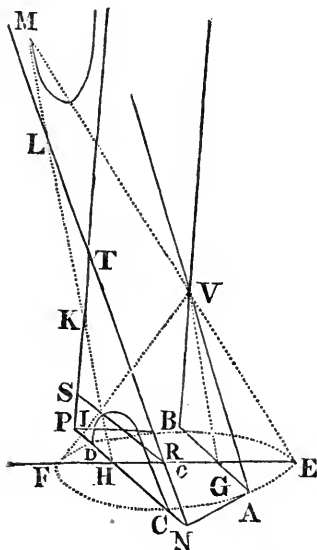
*Cas. 2.* Si punctum  $F$  infinitè distaret a puncto  $E$ , lineâ  $F'G$  æqualis censenda foret lineâ  $F'H$ , ideoque  $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : GH \times DH$ , hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

*Cas. 3.* Si punctum  $F$  non foret in eadem sectione in qua est punctum  $E$ , sed in oppositâ, eadem foret demonstratio nisi quod puncta  $M$  et  $I$ , in eadem Hyperbola forent.

*Cas. 4.* Eadem etiâ fiet demonstratio sive puncta  $G$  et  $H$  sint intra extremitates Parallelarum  $AB, CD$ , aut intra vertices  $E$  et  $F$  lineæ secantis, sive sint extra.

*Corol. 1.* Sumatur medium lineæ secantis puncta  $E$  et  $F$  sitque  $c$ , si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis a Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit  $EG \times GF = cE^2 - cG^2$  ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus a Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret  $EG \times GF = cG^2 - cE^2$ , ut liquet per 6. 2. Elem.

*Corol. 2.* Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, et ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur lineâ trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangen-

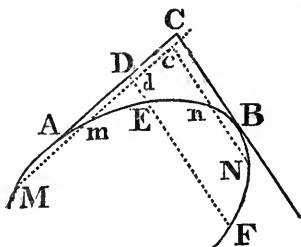


bolarum: erunt ergo Triangula  $VGE$  et  $MHE$ ,  $VGF$  et  $IHF$  similia unde habentur hæc proportiones

$$VG : MH = EG : EH$$

et  $VG : IH = FG : FH$ , et per compositionem rationis

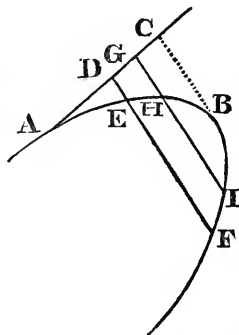
tem et curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



Sint  $AC$ ,  $CB$  Tangentes sectionis Conicæ  $ABF$ , ex  $D$  ducatur  $DEF$  parallela  $CB$ , erit  $AC^2 : CB^2 = AD^2 : DF \times DE$ .

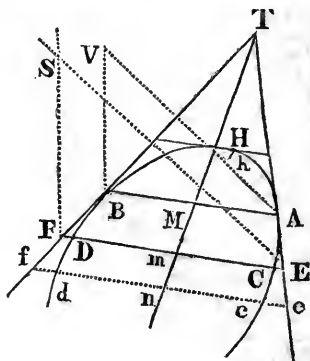
Ducatur  $Mm$  c parallela Tangenti  $AB$ , et  $Nn$  c parallela Tangenti  $CB$ , et  $Mm$  c lineam  $DEF$  secet in  $d$ , erit per Lem. sup.  $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$ , est enim  $Mc$  linea secans parallelas  $cN$ ,  $dF$ ; evanescant arcus  $Mm$ , et  $Nn$ , coincident lineæ  $Mm$  c cum  $AC$  et  $Nn$  c cum  $BC$ , eritque  $cn = cN = CB$ ,  $dF = DF$ ,  $dE = DE$ ,  $Mc = mc = AC$ ,  $Md = md = AD$ , ergo erit  $CB^2 : DF \times DE = AC^2 : AD^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$ . Q. e. d.

Corol. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per eorum partem inter Tangentem et curvam interceptam. Sit  $AC$  Tangens ex ejus punctis  $D$  et  $G$



ducantur Parallelæ  $DEF$ ,  $GHI$ , erit  $AD^2 :$

$AG^2 = DF \times DE : GI \times GH$ , nam supponatur in  $B$  ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in  $C$  erit per Corollarium superius  $AC^2 : BC^2 = AD^2 : DF \times DE = AG^2 : GI \times GH$  ergo alternando,  $AD^2 : AG^2 = DF \times DE : GI \times GH$ . Q. e. d.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ, quas bisecat, ipsi ordinatim applicatæ dicantur, et earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: et denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

His positis 1<sup>o</sup>. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. Lib. 2. Prop. 28.)

2<sup>o</sup>. Linea in Vertice Diametri ducta et Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) et vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ  $AB$  ducantur Tangentes quæ concurrant in  $T$ , per medium  $M$ , lineæ  $AB$  ducatur  $TMm$  sitque linea  $DC$  parallela lineæ  $BA$  hinc inde producta donec Tangentibus  $TB$ ,  $TA$  productis si necesse sit in  $E$  et  $F$  occurrat: per  $AB$  et Verticem coni  $V$  ducatur planum  $VAB$ , et per  $E$   $F$  planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo  $DC$  linea ad Hyperbolam pertinens, et propter Tangentes  $BF$ ,  $AE$ , puncta  $F$  et  $E$  ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est  $EC = FD$ , sed ob parallelas  $AB$ ,  $EF$  et quia bifariam dividitur  $AB$  in  $M$  per lineam  $TMm$  erit  $mE = mF$ , itaque  $mE - EC$  (sive  $mC$ ) =  $mF - FD$  (sive  $mD$ ) ergo linea  $TM$ , lineam  $CD$  lineæ  $AB$  parallelam bifariam dividit, idem verò de quavis linea  $cd$  parallela lineæ  $AB$  demonstrabitur ergo linea  $Mm$  per medium linearum  $AB$ ,  $CD$ , transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2<sup>o</sup>. Linea per Verticem Diametri H ducta, et ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versa sit Tangens lineæ A B parallela, et ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

Denique cum Diameter secet  
Parallelas sunt (juxta Lem. III.)  
facta partium Parallelarum, ut facta  
partium quas secant in Diametro,  
sed partes singulæ Parallelae a Di-  
ametro sectæ sunt utrinque æquales  
et ordinatæ dicuntur, ergo quadrata  
Ordinatarum sunt ut facta partium  
quas secant in Diametro.

*Lemma V.* E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, et Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantia hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. Prop. 34.)

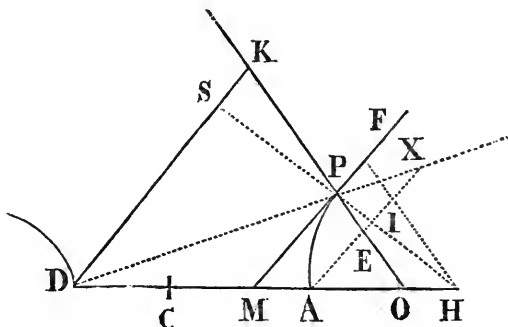
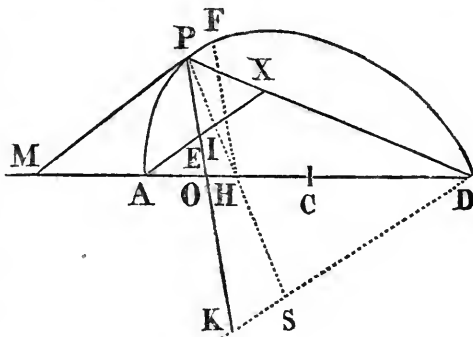
E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, et in eâ sumatur punctum M tale ut sit A M : D M = A O : D O, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, h Tangens in P.

*Demonst.* Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata FH, erit  $MO : M\bar{H} = PO : FH$  et  $MO^2 : M\bar{H}^2 = PO^2 : FH^2$ , sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.)  $AO \times OD : AH \times HD = PO^2 : FH^2$  ergo  $AO \times OD : AH \times HD = MO^2 : M\bar{H}^2$  et alternando  $AO \times OD : MO^2 = AH \times HD : M\bar{H}^2$ . Ducantur autem per A et D lineæ A X, D K parallelæ P M que secant P O ejusque productionem in E et K, ct per P et H ducatur lineæ que parallelæ A X et D K in I et S, secet, similia erunt Triangula A O E, M O P, D O K ob parallelas, unde habentur hæ proportionēs A O : M O = A E : M P.

et  $OD : MO = DK : MP$  et per compositionem rationis erit

$$AO \times OD : \overline{MO}^2 = AE \times DK : \overline{MP}^2.$$

Pariter similia sunt Triangula  $AHI$ ,  $MHP$ .



D H S, unde est : A H : M H = A I : M P  
et D H : M H = D S : M P.

et per compositionem rationis erit

$$AH \times DH : \overline{MH}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2.$$

Sed si F pertinet ad curvam invenitur  $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times DH : \overline{MH}^2$ , foret ergo  $AE \times DK : \overline{MP}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$ . sive  $AE \times DK = AI \times DS$  et  $AE : AI = D S : D K$ , quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur  
P D, quæ lineam A E I (productam si necesse  
fit) secet in X; ob parallelas P M, X A est  
A M : D M = P X : D P  
et P X : D P = X E : D K,  
et ob Triangula similia A O E, D O K est  
A O : D O = A E : D K, et quia per Hypo-

thesim est  $AM : DM = AO : DO$ , erit  
 $XE : DK = AE : DK$  ideoque in datâ  
 Hypothesi  $XE = AE$  et cum sit  
 $XI : XE = DS : DK$  ob parallelas, erit  $XI :$   
 $AE = DS : DK$  erat verò ex suppositione  
 quod  $F$  est in curva,

$AE : AI = DS : DK$ , foret ergo  
 $XI : AE = AE : AI$ , et  $AE^2 = XI \times$   
 $AI$ . Sed  $AE^2$  quadratum dimidii lineæ  $AX$   
 est semper majus Rectangulo ejus partium  $XI$   
 $\times AI$  (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea  
 esse æqualia, quod tamen sequitur supposito  
 punctum  $F$  ad curvam pertinere, ideoque,  $MP$   
 curvam tangit in  $P$ . Sed ad idem cujusvis cur-  
 vae punctum duas Tangentes rectas duci non  
 posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens  
 in  $P$ , ita occurrit Diametro ut sit  
 $AM : DM = AO : DO$ . Q. e. d.

Cor. 1. Si Diameter  $AD$  sit infinita, hoc est  
 punctum  $D$  ad infinitum removeatur,  $DM$  et  
 $DO$  æqualia censenda sunt, cum ergo sit  
 $DM : AM = DO : AO$  erit  $AM = AO$ ;  
 sive distantia puncti concursus Tangentis cum  
 Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ  
 ab eodem vertice sumptæ (Ap. Lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter  $AD$  sit terminata, ejus-  
 que medium sit  $C$  sitque  $PO$  ordinata fiatque  
 $CM : CA = CA : CO$ , erit  $PM$  tangens in  
 puncto  $O$ ; Etenim sumendo summam et dif-  
 ferentiam terminorum harum rationum est,  
 $CM + CA : CA + CO = CM - CA :$   
 $CA - CO$

sive in primâ ratione ponendo  $DC$  pro  $CA$   
 est  $DM : DO = AM : AO$  aut alternando  
 $DM : AM = DO : AO$ , ergo (per Lemma)  
 $MP$  erit Tangens in  $P$ , est ergo semidiameter  
 media proportionalis inter abscissam a centro  
 sumptam, et partem Diametri a centro ad con-  
 cursum Tangentis comprehensam (Apol. Lib.  
 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto  $P$  Sectionis Conicæ ducatur  
 Tangens, quæ secet Diametrum in  $M$ ,  
 et ducatur ordinata  $PO$  quæ secet Diametrum  
 in  $O$  factum partium Diametri  $AO \times DO$  est  
 æquale facto  $CO \times OM$  ex partibus lineæ a

Centro ad Tangentem sumptæ et per  
 ordinatam in  $O$  sectæ. Cum enim  
 sit  $CM : CA = CA : CO$  tol-  
 lendo terminos secundæ rationis a  
 terminis primæ erit  $MA : AO =$   
 $CA$  (sive  $DC) : CO$ , unde com-  
 ponendo erit  $MO : AO = DO :$   
 $CO$ , ideoque  $AO \times DO = CO$   
 $\times MO$ ; et (per 5. vel 6. II. Elem.)  
 prout  $O$  est inter  $A$  et  $D$  vel ultra,  
 erit  $CO \times MO = AC^2 - CO^2$   
 vel  $CO^2 - AC^2$ , unde deduci-  
 tur  $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$  vel  
 $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$ .

### De Hyperbolâ.

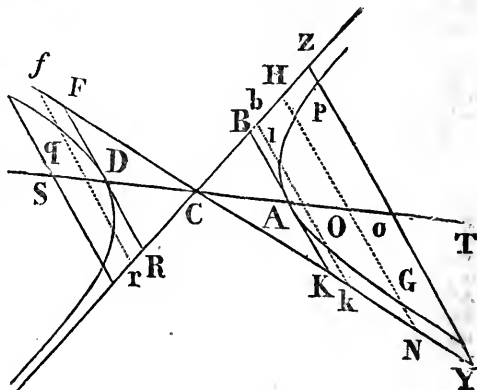
Theor. I. Lineæ omnes ab Intersectione  
 Asymptotorum in eorum Angulo ductæ et  
 utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque  
 Diametri, et earum portio inter utramque Hy-  
 perbolam comprehensa, dicitur Diameter trans-  
 versa, et bifariam dividitur in Intersectione As-  
 ymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum  
 vocatur. Tangentes verò in utroque vertice  
 ejusdem Diametri ductæ et inter Asymptotos  
 comprehensæ sunt inter se Parallelæ et æqua-  
 les, et bifariam dividuntur ab ea Diametro  
 dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol.  
 Lib. 1. Prop. 30. Lib. 2. Prop. 3. et 19.)

Demonst. Ductâ enim quomodocumque lineâ  
 $SCT$  in Angulo Asymptotorum  $ZCY$  per  
 earum intersectionem  $C$ , si crura  $CZ$  et  $CY$   
 sumantur reciprocè proportionalia sinibus An-  
 gulorum adjacentium, ducaturque lineâ  $ZY$   
 illa per lineam  $SCT$  bifariam dividetur; nam  
 in Triangulo  $CZY$  est  $CZ : CY = \sin. Y :$   
 $\sin. Z = \sin. Y \cos. \sin. Z \cos.$  (per const.)  
 et alternando,  $\sin. Y : \sin. Y \cos. = \sin. Z :$   
 $\sin. Z \cos.$  Sed in Triangulo  $COY$  est  
 $\sin. Y : \sin. Y \cos. = CO : YO$ ,  
 et in Triangulo  $COZ$  est

$\sin. Z \sin. Z \cos. = CO : ZO$ ,  
 ergo cum duæ priores rationes sint æquales,  
 est  $CO : YO = CO : ZO$ , ideoque  $YO = ZO$ .

Omnis autem lineâ  $HN$  lineæ  $ZY$  parallelâ  
 similiter bifariam dividitur in  $O$  per lineam  
 $ST$ , partes autem ejus inter Hyperbolam et  
 Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales,  
 per Lem. I. cum ergo sit semper  $HO = ON$ ,  
 et  $HP = GN$  est  $HO - HP = NO -$   
 $NG$  sive  $OP = OG$ . Ergo lineâ  $ST$ , lineas  
 omnes lineæ  $ZY$  parallelas, in Hyperbola con-  
 tentas bifariam secat, est ergo ejus Diameter  
 per Lemma V.

Sint verò  $A$  et  $D$  puncta in quibus lineâ  $ST$   
 occurrit Hyperbolis, per ea ducantur  $BAK$ ,  
 $FDR$  parallelæ lineæ  $ZY$  inter Asymptotos  
 contentæ, ergo bisecantur in  $A$  et  $D$ , cum verò  
 sint parallelæ ordinatis Diametro  $ST$  sunt Tan-



gentes in verticibus A. et D (per Lemma IV.) et inter se Parallelae.

Dico præterea eas esse æquales, ducantur enim Parallelae ipsis proximæ b i K, f q r: erit  $f q \times q r = b i \times k i$  (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangentes fit tandem  $f q = F D$ ,  $q r = R D$ ;  $b i = B A$ , et  $k i = K A$  est ergo  $F D \times R D = B A \times K A$ , sed est  $F D = D R$  et  $B A = K A$  ergo  $F D^2 = B A^2$  et  $F D = B A = K A$ . Unde tandem cum Triangula C A K et C D F sint similia, et sit C A : C D = K A : F D est etiam C A = C D.

*Theor. II.* Tertia proportionalis Diametro transversæ et Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; hinc ista curva *ὀρθή* sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est facto lateris recti per abscissam a proximo vertice (Apol. Lib. I. Prop. XXI.) Coincidit verò hæc Propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

*Demonst.* Sit ut prius Diameter transversa D A T, conjugata B A K et ordinata inter Asymptotas contenta H P O G N: sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis D O, H N a puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum a puncto concursus O, usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis est quadrato semitangentis B A, sive semi-diametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est G N × G H = b i × k i (et per præced. Dem.  $b i \times k i = B A^2$ ) et est P O = G O ideo proportio superior huc redit, A C<sup>2</sup> : B A<sup>2</sup> = A O × D O : P O<sup>2</sup>. Sit verò L latus rectum, est per ejus definitionem 2 A C : 2 B A = 2 B A : L, ergo est 2 A C : L = 4 A C<sup>2</sup> : 4 B A<sup>2</sup> = A C<sup>2</sup> : B A<sup>2</sup> ideoque 2 A C : L = A O × D O : P O<sup>2</sup>.

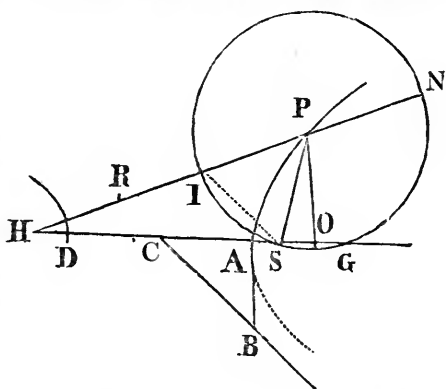
Hinc deducitur quod  $P O^2 = \frac{L \times A O \times D O}{2 A C}$   
 $= \frac{D O}{A D} \times L \times A O$ ; ut ergo D O est semper

major quàm A D, est etiam P O<sup>2</sup> semper major quàm L × A O. Q. e. d.

*Theor. III.* Diameter illa quæ Asymptotorum Angulum bifarium dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque est Axis Hyperbolæ et ejus Diameter conjugata Axis conjugatus: si a centro feratur utrinque in Axem longitudine Asymptoti a centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, et si a focus ad quodvis Hyperbolæ punctum ducatur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur latus rec-

tum Principale, et tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantia verticis a foco, si denique bifarium dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum bisecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

*Demonst.* Ducatur quævis linea ex foco H, sumatur H I = D A, et ducta I S ad alterum focum S, fiat I S P = P I S erit P I = P S, ideoque differentia linearum H P, S P erit H I = D A seu axi transverso, dñco hoc positò, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio P S, describatur circulus I S G N habebitur hæc proportio, H I : H S = H G : H N sumatur dimidium harum linearum manebit proportio,



sit autem  $\frac{1}{2} H I = H R$ ,  $\frac{1}{2} H S = C S$ ,  $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} H S + \frac{1}{2} S G$  et demissa P O perpendiculari in S G est  $\frac{1}{2} S G = S O$ , ergo  $\frac{1}{2} H G = C S + S O = C O$ . Denique  $\frac{1}{2} H N = \frac{1}{2} H I + \frac{1}{2} I N = R I + I P = R P$  est ergo H R : C S = C O : R P: componendo primum habetur H R : C S + H R = C O : R P + C O et prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo habetur H R : C S + H R = C O + H R : H R + R P + C S + C O, sive quia H R = A C = D C, et C S = C H est A C : C S + A C = D O : H P + H O. At operationibus contrariis in eandem proportionem, H R : C S = C O : R P factis, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminos et terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit

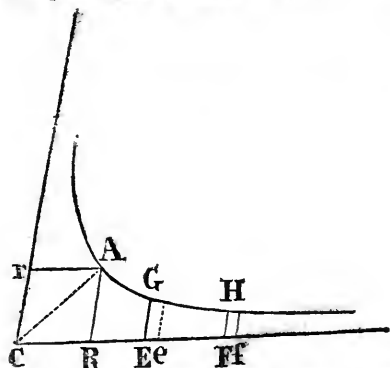
A C : C S — A C = A O : H P — H O, multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit

A C<sup>2</sup> : C S<sup>2</sup> — A C<sup>2</sup> = A O × D O : H P<sup>2</sup> — H O<sup>2</sup> sit autem perpendicularis A B erecta ab A usque ad Asymptotam C B, est C B = C S, et C S<sup>2</sup> — A C<sup>2</sup> = A B<sup>2</sup>; est etiam H P<sup>2</sup> — H O<sup>2</sup> = P O<sup>2</sup>, est ergo A C<sup>2</sup> : A B<sup>2</sup> = A O × D O : P O<sup>2</sup>, sed



æquiangula et ea lateribus reciprocis contineri  
sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis C A, et ex vertice A ducatur lineæ A R, A r Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam divisum et parallelas, erit C R = A R sit A R = 1; et fingatur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed



procedendo sit  $C E = x$  debeat esse  $C F = x^n$ , erunt ergo  $G E = \frac{1}{x}$  et  $H F = \frac{1}{x^n}$  est enim

$$CE:CR=AR:GE \text{ since } x:1=1:\frac{1}{x}$$

et CF: CR=AR: FH sive  $x^n: 1 = 1: \frac{1}{x^n}$ ,

fluxio autem lineæ  $CE$  erit  $\frac{dx}{x^n} = Ee$ , et  
lineæ  $CF$  erit  $\frac{dx}{x^n} = Ff$ , ideo  
areæ  $RG$  fluxio erit  $\frac{dx}{x} \times \frac{1}{x^n} = \frac{dx}{x^{n+1}}$  et areæ

$$R H, n x^{n-1} dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{n dx}{x} \text{ sed } \frac{dx}{x}:$$

$$\frac{n \, dx}{x} = 1 : n, \text{ sunt ergo fluxiones earum}$$

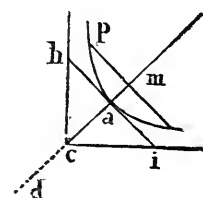
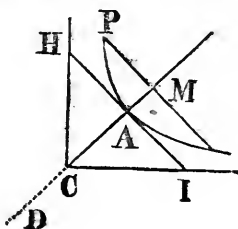
arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque  
et areæ integræ R G, R H quæ sunt earum  
summæ, sunt in eâdem ratione 1 ad n, sunt  
autem 1 et n Exponentes potentiarum abscissa-  
rum C E, C F; sunt ergo areæ sicut illi ex-  
ponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Ex-  
ponentes potentiarum quantitatum quarum sunt  
Logarithmi, ergo illæ areæ R G, R H, sunt  
Logarithmi abscissarum C E, C F.

In puncto R ubi abscissa est unitas, area est o, ut Logarithmus convenit, fitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate C R fiunt fractiones.

**Theor. V.** Si Angulus Asymptotorum sit Rectus, Hyperbola dicitur aequaliter, aequalesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axi transverso est æquale: ac (per Theor. II.) facta

abscissarum quadrato ordinarum æqualia sunt, sicut in circulo : Diversæ Hyperbolæ eodem asymptotorum angulo descriptæ sunt similes : si verò idem sit Hyperbolarum axis, sed diversus Angulus, erunt ordinatæ ad idem axes punctum sit-  
tunt Radices quadratæ Laterum Rectorum Pri-  
ncipalium, et in eâ erunt ratione portiones earum  
Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum qua-  
rum æquales sunt abscissæ.

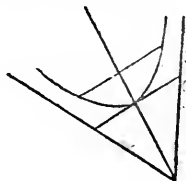
*Demonst.* Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit  $90^\circ$ . ejusque dimidium  $45^\circ$ . Triangulum CAH erit isosceles et  $\angle C A = \angle A H$ , cætera ex his faciliè deducuntur.



Si in duabis Hyperbolis anguli Asymptotorum sint aequales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula  $CAH$ ,  $cab$ : ideoque  $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ab^2$  sumantur abscissæ  $AM$ ,  $am$  in ratione  $AD$  ad  $a$  erit etiam  $DM : dm$  in eadem ratione cum sit ergo  $AM : am = AD : ad$

et  $D M: d m \equiv A D: a d$ .

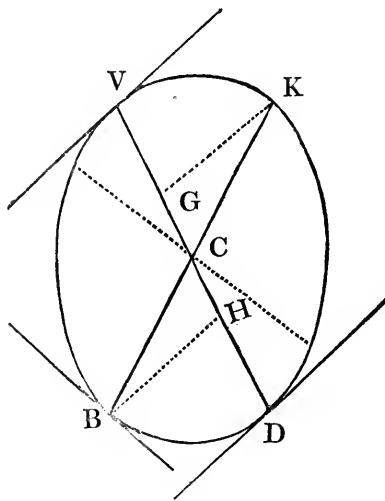
est  $A \times D M: a m \times d m = A D: a d$   
sed est  $C A^2: A H^2 = c a^2: a h^2 = A M$   
 $\times D M: M P^2 = a m \times d m: m p^2$ , Et  
alterni,  $A M \times D M: a m \times d m = M P^2:$   
 $m p^2$  est, ergo  $A D^2: a d^2 = M P^2: m p^2$   
unde est  $M P: m p = A D: a d$ , omnes ergo  
ordinate ac omnia puncta Hyperbolæ determi-  
nantur per rationem  $A D$  ad  $a d$ .



Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi, sed diversi Asymptotorum Anguli diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, et quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò et factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas et utrinque æquales divisa singula Parallelogrammata quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eadem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

### De Ellipsi.

*Theor. I.* Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, quæque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri, cuius est ordinata, conjugata dicitur: (Apol. I. 1. Prop. 30.)



*Demonst.* Si per medium C, Diametri Ellipsis A D, ducatur linea quævis B K, et per puncta B et K ducantur B H, K G ordinatæ Diametro A B, erit per Lemma V.

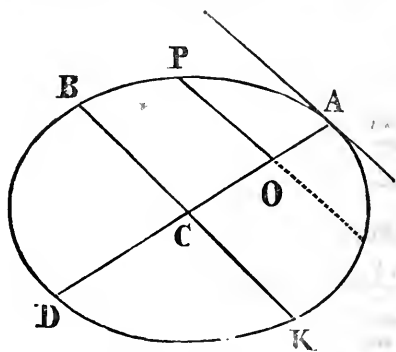
$A G \times G D : A H \times H D = G K^2 : B H^2$  et propter trianguia similia G K C, C B H est  $G K : B H = C G : C H = B C : C K$ , est ergo  $A G \times G D : A H \times H D = C G^2 : C H^2$ , est autem (per 5. 11. Elem.)

$A G \times G B = A C^2 - C G^2$  et  $A H \times H B = A C^2 - C H^2$ , est ergo

$A C^2 - C G^2 : A C^2 - C H^2 = C G^2 : C H^2$ . et jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est  $A C^2 : A C^2 = C G^2 : C H^2$ , ideo  $C G = C H$ , ac per consequens  $B C = C K$ . Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, et per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque B K bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per Lemma V.

Denique solæ lineæ per Centrum transeuntes sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, et illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur a Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bisecantur.

*Theor. II.* Tertia proportionalis Diametro transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; (Apol. lib. I. Prop. 21.)



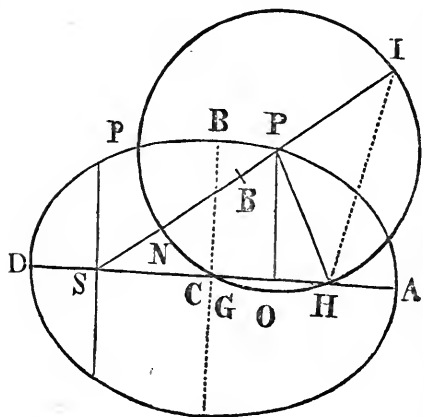
*Demonst.* Sit Ellipsis Diameter A C D, ejus conjugata B C K est per Lemma IV.  $A C \times C D$  sive  $A C^2 : A O \times D O = B C^2 : P O^2$  et alternando  $A C^2 : B C^2 = A O \times D O : P O^2$ , sed est  $2 A C : 2 C B = 2 C B : L$ , ergo  $4 A C^2 : 4 C B^2 = A C^2 : C B^2 = 2 A C : L = A O \times D O : P O^2$ , ergo

$$\text{est } P O^2 = \frac{L \times A O \times D O}{2 A C} = \frac{D O}{2 A C} \times$$

$L \times A O$  sed ut 4 D O est semper minus quam 2 A C, est P O<sup>2</sup> semper minus facto Lateris recti per alterutram abscissam.



*Theor. III.* Sit A D axis major, a centro feratur utrinque C H, C S, æquales et tales ut quadratum C H<sup>2</sup> sive C S<sup>2</sup> cum quadrato semi-axis conjugati C B<sup>2</sup> sit æquale quadrato semi-axis majoris C A<sup>2</sup>, dicanturque puncta H et S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. III. Prop. LII.); et tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantia foci a proximo Vertice.



*Demonst.* Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur S I = D A et ducta I H ad alterum focum, fiat I H P = I erit I P = P H, ideoque S P + P H = S P + P I = S I = D A sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio P H describatur circulus I H G N habebitur hæc Proportio S I : S H = S G : S N, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem  $\frac{1}{2}$  S I = S R;  $\frac{1}{2}$  S H = C H;  $\frac{1}{2}$  S G =  $\frac{1}{2}$  S H -  $\frac{1}{2}$  G H et demissa P O perpendiculari in G H est  $\frac{1}{2}$  G H = H O ergo  $\frac{1}{2}$  S G = C H - H O = C O. Denique  $\frac{1}{2}$  S N =  $\frac{1}{2}$  S I -  $\frac{1}{2}$  N I = R I - P I = R P est ergo

S R : C H = C O : R P et componendo habetur S R : S R + C H = C O : C O + R P, tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est: S R : S R + C H = C O + S R : C O + R P + S R + C H sive quia S R = A C = D C et C H = C S, est A C : A C + C H = D O : S P + S O. At operationibus contrariis factis in eandem proportionem S R : C H = C O : R P, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminos

e terminis secundæ detrahendo substitutionibusque factis erit

A C : A C - C H = A O : S P - S O multiplicatis autem terminis utriusque proportionis est

A C<sup>2</sup> : A C<sup>2</sup> - C H<sup>2</sup> (sive B C<sup>2</sup>) = A O

× D O : S P<sup>2</sup> - S O<sup>2</sup>, est autem (per 47. I. Elem.) S P<sup>2</sup> - S O<sup>2</sup> = O P<sup>2</sup>, sed est A C<sup>2</sup> : B C<sup>2</sup> = A O × D O ad quadratum ordinatæ in O, est ergo P O ipsa illa ordinata, et punctum P ad Ellipsim pertinet.

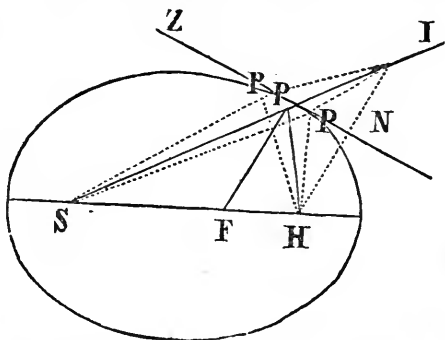
Sit autem S p ordinata in foco erit A C<sup>2</sup> : B C<sup>2</sup> = A S × S D : S p<sup>2</sup>, est autem (per 5. II. Elem.) A S × S D = A C<sup>2</sup> - C S<sup>2</sup> = B C<sup>2</sup>, est ergo A C<sup>2</sup> : B C<sup>2</sup> = B C<sup>2</sup> : S p<sup>2</sup> sive, A C : B C = B C : S p, et duplicando omnes terminos : 2 A C : 2 B C = 2 B C : 2 S p, sed est 2 A C : 2 B C = 2 B C : L ergo L = 2 S p, et  $\frac{1}{2}$  L = S p.

Est autem (per Theorema II.) S p<sup>2</sup>, sive  $\frac{1}{4}$  L<sup>2</sup> =  $\frac{A S}{2 A C} \times L \times D S$  et  $\frac{1}{4}$  L =  $\frac{A S}{2 A C} \times D S$

ut ergo est A S minor 2 A C erit  $\frac{1}{4}$  L minor D S, hoc est latus rectum minus est quadruplo distantia foci a proximo Vertice.

*Theor. IV.* Tangens Ellipsis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam e lineis a foco ductam et productionem alterius: et lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, et si bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ a foco ductæ, linea bisecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)

*Demonst.* Ducantur a focus lineæ S P, H P productaque S P in I, dividatur bifariam angulus S P H, dico lineam Z P N non occurrere Ellipsi in ullo alio puncto p, sit P I = P H et



ductâ I H, erit P N perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur p I, p H, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula p N I, p N H (per 4. I. Elem.) sed si p foret in Ellipsi, esset S p + p H. sive S p + p I = S I quod absurdum (per 20. I. Elem.)

Est autem Z P S = I P N (per 15. I. Elem.) est I P N = N P H, per const. ergo Z P S = N P H. Si ergo F P S = F P H est Z P S + F P S = N P H + F P H, sunt



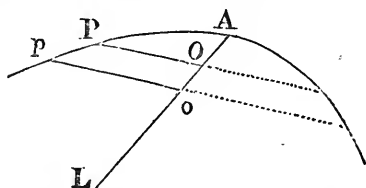


*Cor. II.* Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum et Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelae  $Pp$ ,  $Ff$ , per earum medium  $O$ , o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium  $C$  erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis  $R$ , r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam  $Rr$  quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

### IX. De Parabola.

*Theor. I.* Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ et inter se Parallelae: quadrata ordinarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, et cum tertia proportionalis abscissæ et ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. Lib. 1. Prop. 20.)

*Dem.* Ducatur in basi conï chorda parallela plano Parabolæ, et infinitè parva, per verticem conï et eam chordam ducatur Planum et aliud illi parallelum per unam e lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ, et ejus centrum tanto magis a Vertice conï removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem conï ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, et ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidit hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri a puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelae et infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2<sup>do</sup>. Lem. III. constat, quòd si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur a Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinarum.

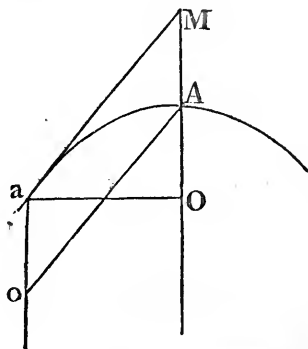


Fiat  $A O : O P = O P : L$  erit  $O P^2 = A O \times L$ ; esto verò quævis alia abscissa  $A o$  et ordinata  $o p$  erit  $A o : A o = O P^2 : o p^2$ , et multiplicando primam rationem per  $L$  erit  $L \times A O : L \times A o = O P^2 : o p^2$ , sed per Hypothesim  $A O \times L = O P^2$  ergo etiam  $L \times A o = o p^2$  hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondenti.

*Cor. I.* Si in Diametrum productam sumatur a Vertice longitudo æqualis lateri Recto, et ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, et in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit

hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

*Cor. II.* Si in Diametro quavis sumatur a vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim  $A o = \frac{1}{4} L$  est  $\frac{1}{4} L L = o p^2$ : ergo  $L L = 4 o p^2$  et  $L = 2 o p$ , sive toti ordinatim applicatæ in  $p$

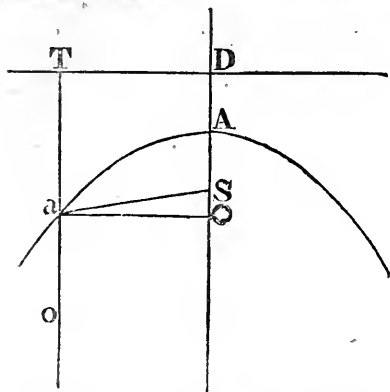


*Cor. III.* Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis et quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam e vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a  $M$  quæ axi occurrat in  $M$  et a  $O$  ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis  $A$  ad  $M$  est æqualis distantia ejusdem verticis ab  $O$ , ergo  $M O = 2 A O$ , et (per 47. I. Elem.) est  $A M^2 = M O^2$  (sive  $4 A O^2$ )  $+ a O^2$  (sive  $L \times A O$ )  $= 4 A O^2 + L \times A O$ ; a vertice  $A$  axis ducatur ordinata  $A o$  ad Diametrum propositum, evidens est ob parallelas  $a o$ ,  $A O$ , et Tangentem ordinatæ parallelam, esse  $a o = A M$  sive  $A O$  et  $o A = a M$ ; sit verò  $l$  latus Rectum Diametri  $a o$ , erit  $o A^2$ , sive  $A M^2 = l \times a o = l \times A O$  sed erat  $A M^2 = 4 A O^2 + L \times A O$  ergo  $l \times A O = 4 A O^2 + L \times A O$ , unde  $l = L + 4 A O$ . Q. e. d.

*Theor. II.* Si in axe sumatur a vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultra verticem eadem feratur longitudo et per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producat quavis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem et Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, et est æqualis distantia ejus verticis a foco.

*Demonst.* Ut enim Diameter et axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a  $T$  a vertice diametri ad directricem erit  $T = O D = D A + A O$ , est verò  $D A$ , quarta pars lateris recti principalis et  $A O$  abscissa axis quæ respondet ordinatæ a  $O$  a vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti et quadruplo  $A O$ , hoc est  $= 4 D A + 4 A O$

ergo a T = D A + A O est quarta pars lateris Recti Diametri a o.



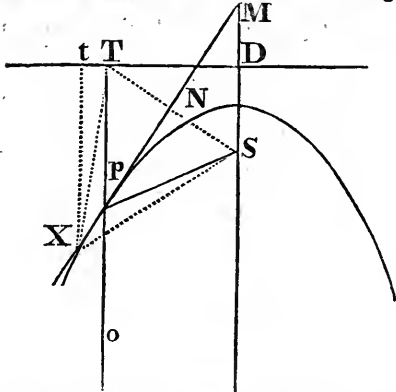
Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, sitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) est  $Sa^2 = SO^2 + aO^2$  et  $aO^2 = 4DA \times AO$ : ergo  $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$ , sed est  $DO^2$  (per 8. 2. El.)  $= SO^2 + 4DA \times AO$ , ergo  $DO^2 = Sa^2$  et  $Sa = DO = aT$ .

Theor. III. Si a puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, et linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producaturs donec secet axem, portio axis a foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ a foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ a foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, et Angulus Diametri cum lineâ a foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam et ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, et pars axis inter eam et Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò perpendicularis est media proportionalis inter ea semilatera recta.

Demonst. Sit T D directrix, a puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S et denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter et bifariam dividet lineam S T a foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter se æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam X T ac per consequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S sunt æquales

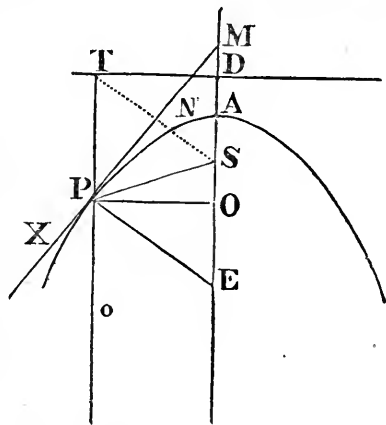
ob Parallelas T P, M S, et per const. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, est ergo



Triangulum M S P Isosceles, et M S = S P

Anguli autem X P o, T P N, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed T P N = N P S per constr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut sit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent



duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum et est P E perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O) M O : P O =

$$P O : O E = \frac{P O^2}{M O}, \text{ est verò } P O^2 = L \times$$

$$A O \text{ et } M O = 2 A O \text{ ergo } O E = \frac{L \times A O}{2 A O} =$$

$$\frac{L}{2}.$$

Ergo etiam E M est æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali et quadruplo



Porrò ob similitudinem triangulorum  $HAX$ ,  $HMP$ , est  $HM : PM = HA : AX = PM \times HA$  et  $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$  et  $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$ , vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciproce ut  $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$

In Parabolâ (per Prop. 35. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Cor. 1. Lem. V. de Conicis)  $HA = AM$ , et  $HM = 2AM$ , et (per Prop. 20. Lib. 1. Conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola)  $AM$ , adeoque et  $HM$  est semper ut  $PM^2$ . Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciproce ut  $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$  sive ut  $\frac{AM^2}{PM}$ , hoc est, ut  $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$ , hoc est, reciproce ut cubus ordinatæ  $PM$ .

In Ellipsi et Hyperbolâ, si latus rectum axis  $AB$ , dicatur  $L$ , erit (ex Prop. 21. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Theor. II. de Ellip.)  $PM^2 : AM \times MB = L : AB$  ac proinde  $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$ , et  $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$ , et

$\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$ , unde deletâ ratione constanti  $\frac{AB^2}{L^2}$ , erit vis

centripeta reciproce ut  $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$ ; verùm (per Prop. 37. Lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis  $C$ , est  $CM : CA = CH : CA$ , adeoque dividendo vel componendo  $CM : AM = CA : HA$ , ac proinde addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis e terminis prioris  $MB : HM =$

$CA : HA$  et  $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$  et  $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$  quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ et Ellipsi adeoque in omni sectione conicâ vis centripeta reciproce ut  $PM^3$ , seu reciproce ut cubus ordinatæ  $PM$ ; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprâ inventâ, quantitate

$\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$ , constante.





centricè secantis chorda P V sunt ad altitudinem S P in datis rationibus; ideoque S P cub. est ut S Y q  $\times$  P V, hoc est (per Corol. 3. et 5. Prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

## LEMMA XII.

*Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.*

Constat ex conicis. (<sup>7</sup>)

## PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

*Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (<sup>8</sup>)*

Sunto C A, C B semiaxes ellipseos; G P, D K diametri aliæ conjugatæ; P F, Q T perpendiculara ad diametros; Q v ordinatim applicata ad diametrum G P; et si compleatur parallelogrammum Q v P R, erit ([<sup>a</sup>] ex conicis) rectangulum P v G ad Q v quad. ut P C quad. ad C D quad. et

chorda per centrum virium S ducta P V, demissumque in tangentem perpendicularum S Y, et ob angulum S Y P, rectum, et S P Y, datum, dabitur specie triangulum S P Y. Ergò datur ratio S Y ad S P, et in virium centripetarum formulis S P scribi potest pro S Y. Prætereà datur ratio P V ad S P, nam (210) S Y  $\times$  Q P = S P  $\times$  Q T, adeoque Q P =  $\frac{S P \times Q T}{S Y}$ ;

undè ob rationem  $\frac{S P}{S Y}$  datam, Q P scribi potest

pro Q T. Verùm (211) P V =  $\frac{Q P^2}{Q R}$ , ergò

P V, est ut  $\frac{Q T^2}{Q R}$ . Cùm igitur ex demonstra-

tisin Prop. IX.  $\frac{Q T^2}{Q R}$ , sit ut S P, erit etiam P V, ut S P, et propterea S P, loco P V, substitui potest in formulis.

227. Scholion. Propositio IX. facillè demonstratur etiam per formulam Hermannii (214), v = d p : p<sup>3</sup> d z; est enim in hoc casu S P = z, S Y = p; et si ratio  $\frac{S Y}{S P}$  data dicatur

$\frac{a}{b}$ , crit  $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$  ergo a z = b p, et (160) a d z

= b d p, et  $\frac{d p}{d z} = \frac{a}{b}$ ; undè v =  $\frac{a}{b p^3}$ ; hoc

est, ob datam  $\frac{a}{b}$  vis centripeta v, est directè ut

$\frac{1}{p^3}$ , hoc est reciprocè ut p<sup>3</sup>, aut quia p =

$\frac{z a}{b}$ , v erit ut  $\frac{1}{z^3}$  directè, reciprocè autem ut z<sup>3</sup>,

deletis nimirùm constantibus.

(<sup>7</sup>) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe NEWTONUS eo Lem. ate ad solutionem proximi Problematis utetur.

(<sup>8</sup>) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problematis et ad figuram infra positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

(<sup>a</sup>) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll. Vide sup. Lemma IV. de Conicis.

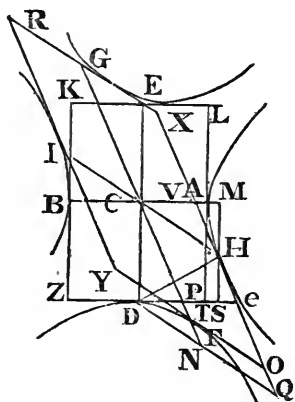
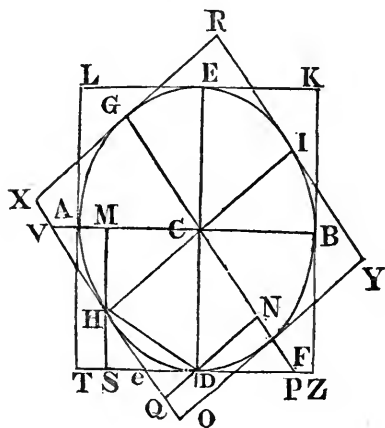


*Idem aliter.*

In rectâ  $P G$  ab alterâ parte puncti  $T$  sumatur punctum  $u$  ut  $T u$  sit æqualis ipsi  $T v$ ; deinde cape  $u V$ , quæ sit ad  $v G$  ut est  $D C$  quad. ad  $P C$  quad. Et quoniam ex conicis est  $Q v$  quad. ad  $P v G$  ut  $D C$  quad. ad  $P C$  quad. erit  $Q v$  quad. æquale  $P v \times u V$ . Adde rectangulum  $u P v$  utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcûs  $(^c)$

*Dem.* Sunto Ellipseos et hyperbolæ axes  $E D$ ,  $A B$ , et  $G F$ ,  $H I$ , diametri conjugatæ, ductisque per axium et diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum  $L K Z T$ , et parallelogrammum  $X R Y O$ ; jungatur  $D H$ ,

et eadem altitudo ob parallelas  $H C$ ,  $Q N$ ; ac proinde  $C M S D = C H Q N$ . Cum igitur sit  $P C V e$ :  $C H O F = C H O F$ :  $C H Q N$ , et  $P C V e$ :  $C A T D = C A T D$ :  $C H Q N$ , necesse est ut sit  $C A T D = C H O F$ , quare rectangulum  $L K Z T$ , quadruplum rectanguli  $C A T D$ , æquale est parallelogrammo



et  $D N$  ordinatim applicetur ad diametrum  $G F$ , erit (per Prop. 37. lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis)  $P C$  ad  $C F$ , (hoc est, parallelogrammum  $P C V e$ , ad parallelogrammum æquè altum  $C H O F$ ) sicut  $C F$ , ad  $C N$ , hoc est, sicut idem parallelogrammum  $C H O F$ , ad parallelogrammum  $C H Q N$ ; et similiter  $V C$ , erit ad  $C A$ , (hoc est, parallelogrammum  $P C V e$ , ad æquè altum,  $C A T D$ ) sicut  $C A$  ad  $C M$ , hoc est, sicut idem  $C A T D$ , ad rectangulum  $C M S D$ , seu ad prædictum parallelogrammum  $C H Q N$ ; nam rectangulum  $C M S D$ , duplum est trianguli  $C H D$ , ejusdem basis  $C D$  ejusdemque altitudinis  $M C$ , et parallelogrammum  $C H Q N$  est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis  $H C$

$X R Y O$ , etiam quadruplo parallelogrammi  $C H O F$ .  $Q. e. d.$

$(^c)$  Adde rectangulum  $u P v$  utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcûs  $P Q$ , æquale rectangulo  $V P \times P v$ . Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcûs  $P Q = Q T^2 + P T^2$ , sed est  $Q T^2 = Q v^2 - T v^2$  sive quia  $T v = T u$  est  $Q T^2 = Q v^2 - T u^2$ , ideo quadratum chordæ arcûs  $P Q = Q v^2 - T u^2 + P T^2$ , est verò  $P T^2 - T u^2 = (P T + T u) \times (P T - T u)$  sive  $P T^2 - T v^2 = P u \times P v$ , ergo quadratum chordæ arcûs  $P Q = Q v^2 + P v \times P u$ . Quod si rectangulo  $P v \times u V$  addas idem rectangulum  $P v \times P u$ , est  $P v \times V u + P v \times u P = P v \times V P$ , erat verò  $Q v^2 = P v \times u V$ , ergo  $Q v^2 + P v \times P u$  sive quadratum chordæ arcûs  $P Q$  crit æquale Rectangulo  $P v \times V P$ , sive  $V P v$

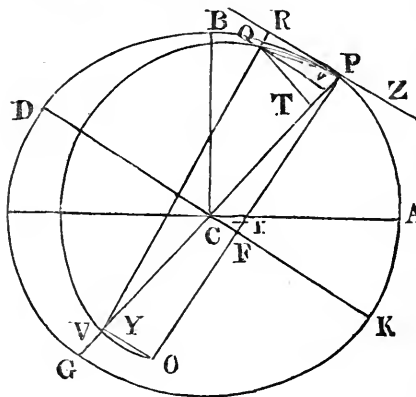


inde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut  $\frac{2 D C q}{P C}$  in P F q (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc est (ob datum 2 D C q in P F q) directè ut P C. Q. e. i.

*Corol. 1.* Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos: (\*) et vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest

Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo P C D, faciliè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. *Coroll. 2.* Datis radio osculi P r, semidiametro sectionis conicæ P C, et positione tangentis P R, seu angulo P C D, diametrum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata D C, et describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis P F, ac proindè D C, media proportionalis inter P r, et P F, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.



232. *Coroll. 3.* Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cùm enim sit vis centralis (212) ut  $\frac{C P}{P r \times P F^3}$ , sitque  $P F = \frac{B C \times C A}{C D}$ , (per Lem. XII.) et  $P r = \frac{D C^2}{P F}$  (230). His valoribus in formulâ  $\frac{C P}{P r \times P F^3}$ , substitutis, ea fit  $\frac{C P}{B C^2 \times C A^2}$  hoc est, ob constantem quantitatem  $B C^2 \times C A^2$ , vis est directè ut P C.

(\*) Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium, etc., ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

233. *Lemma I.* Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, et a Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem P K, ducatur ordinata P O perpendicularis in axem, et in C, ducatur C Q, Parallela, P K, et C V, parallela P O, triangula P O K, C Q V, erunt similia, ergo erit P O : P K = C Q : C V, ergo  $P K \times C Q = P O \times C V$  similia etiam sunt Triangula C M V, O M P, erit ergo C M : M O = C V : P O; sed (per

Cor. 2. Lem. V. de Conicis) est  $C M = \frac{C A^2}{C O}$

et (per Cor. 3. ejusdem Lem.)  $M O = \frac{A O \times D O}{C O}$  et (per Theor. II. tam de Hyp.

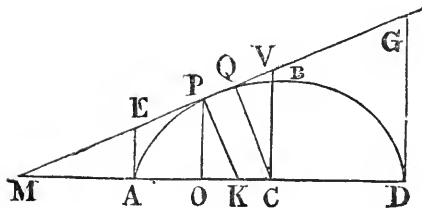
quàm de Ellip.) est  $C A^2 : A O \times D O = C B^2 : P O^2$  ergo est C M : M O =  $\frac{C A^2}{C O}$

$A \frac{A O \times D O}{C O} = C A^2 : A O \times D O =$

$C B^2 : P O^2 = C V : P O$ , ideoque  $C B^2 \times P O = P O^2 \times C V$  utrumque vero dividendo per P O est  $C B^2 = P O \times C V$ , erat verò  $P K \times C Q = P O \times C V$ . Ergo  $P K \times C Q = C B^2$ . Q. e. d.

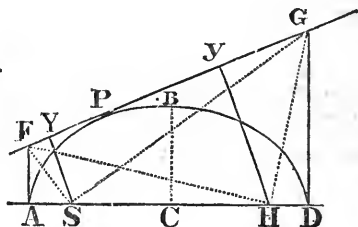
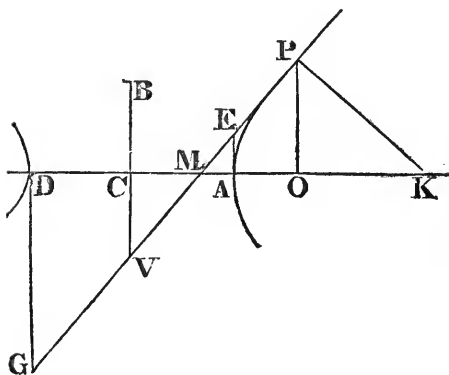
234. *Lemma II.* Sit P M, Sectionis Conicæ Tangens, C A axis, C B ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares A E, D G, ad Tangentem usque, factum earum A E × D G, erit æquale quadrato semi-Axis.

*Demonst.* Ducta P O ordinata ad axem et C V ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemma V. De Conicis) C O : C A = C A : C M. Dividendo verò, est C A = C O + C O = C A, sive A O ad C A sive C O, sicut C M = C A vel C A = C M, sive M A ad C M, hoc est A O : C D = M A : M C, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ nec non mutatur, estque M A : M C = M A + A O (sive M O) :



$C B^2$ , et per naturam focorum (et per  
 5. vel 6. II. Elem.) est  $A S \times S D$   
 $= C B^2$  ergo est  $E A \times D G$  :  
 $A S \times S D$  ideoque  $E A$  :  
 $A S = S D$  :  $D G$  ; Eadem ratione  
 probatur Triangula  $G D H$ ,  $H A E$   
 esse similia, ob latera proportionalia  
 $G D$  et  $T H$ ,  $H A$  et  $E A$  circa an-  
 gulos rectos  $A$  et  $D$  posita, est enim  
 ut prius  $E A \times D G = C B^2 =$   
 $D H \times H A$  ideoque  $D G$  :  $D H =$   
 $H A$  :  $E A$ .

*Secundò*, Triangula  $S D G$ ,  $E G H$  sunt similia, latera enim  $G H$  et  $H E$ ,  $G D$  et  $D S$  circa angulos  $S D G$  et  $E H G$  posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia  $G D H$ ,

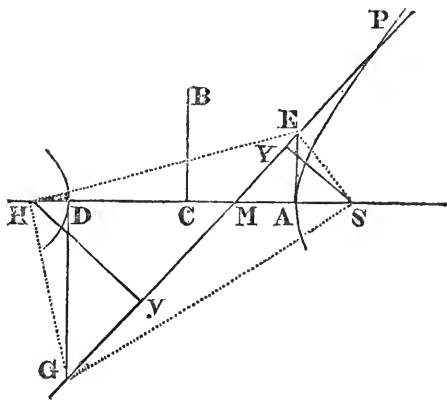


$MC \div DC$ , (sive  $MD$ ) hoc est alternando  $MA : MO = MC \cdot MD$   
 sed ob parallelas est  $MA : MO = AE : PO$  et  $MC : MD = CV : DG$  ergo est  $AE : PO = CV : DG$  et est  $AE \times DG = PO \times CV$  sed per Lemma præcedens est  $PO \times CV = CB^2$ , ergo est  $AE \times DG = CB^2$ . Q. e. d.

235. *Lemma III.* Ducantur a focus perpendicularæ in tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

*Demonst.* Sint illæ perpendiculares  $S Y$ ,  $H y$ , ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ  $A E$ ,  $D G$ , perpendiculares axi usque ad tangentem, et ducantur a focis  $S$  et  $H$ , ad earum extremitates lineæ  $S E$ ,  $S G$  et  $H G$ ,  $H E$ .

Triangula  $EAS$ ,  $SDG$ ,  $EHG$ ,  
 $GH$  y similia inter se, ut et Triangu-  
 la  $GDH$ ,  $HA E$ ,  $GSE$ ,  $ESY$ :  
 primò, similia sunt Triangula  $EAS$ ,  
 quia latera  $E A$  et  $A S$ ,  $SD$  et  $D G$   
 angulos rectos  $A$  et  $D$  posita proportiona-  
 nam (per Lemma præced.) est  $E A \times$



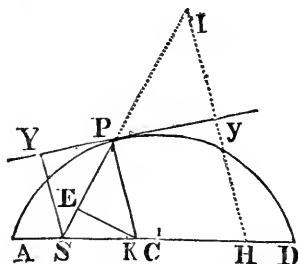
$HA \parallel E$ , est  $GH : HE = GD : HA$ , sed  
 $HA = DS$ , ergo est  $GH : HE = GD : DS$ ; Præterea anguli  $SDG$  et  $EHG$  sunt  
 ambo recti,  $SDG$  quidem per constructionem,

angulus verò E H G est in Ellipsi complementum ad duos rectos angularum G H D et E H A, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli G H D et E H A pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus E H G est rectus; eodem modo probatur Triangula H A E, G S E esse similia, ob latera proportionalia S E et G S, A E et H A, circa angulos H A E et G S E rectos posita; nam ob Triangula similia E A S, S D G est E S : G S = A E : D S sive H A; et H A E est rectus per constructionem et G S E in Ellipsi est complementum ad duos rectos angularum G S D et E A S, et in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia, etc.

Tertio, E G H est simile G H Y (per 8. VI. El.) et eadem ratione est G S E simile E S Y.

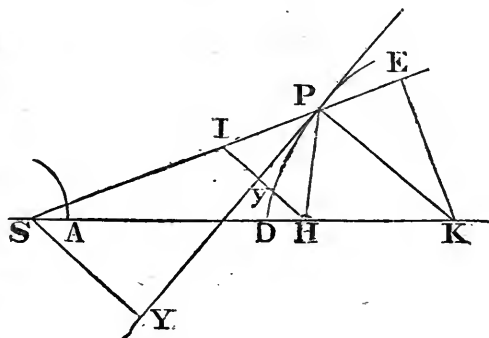
Ex quibus liquet Triangula E A S, G H Y esse similia ut et Triangula G S E, E S Y; ex similitudine Triangulorum E A S, G H Y est E S : G H = E A : H Y, et ex similitudine Triangulorum G D H et E S Y est E S : G H = S Y : G D ergo est E A : H Y = S Y : G D et E A × G D = H Y × S Y sed E A × G D = C B<sup>2</sup> (per Lemma præcedens,) ergo etiam H Y × S Y = C B<sup>2</sup>. Q. e. d.

236. Lem. IV. Ducatur a foco S linea S P ad punctum contactus et ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, et ex puncto K ducatur in lineam S P perpendicularis K E, pars P E lineæ P S erit æqualis semilateri recto.



237. Producat vel secetur S P in I ut sit S I = A D sive Axi ducaturque ex altero foco linea H I quæ dividitur bifariam et perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. et IV. de Ellip.) ergo H I = 2 H y et est H I parallela P K, ergo Triangula P S K, I S H sunt similia, estque P S : P K = S I : I H sive 2 H y, sed ob Parallelas S Y, P K, et angulos rectos Y et E

similia sunt Triangula P S Y, P K E, ergo est P S : P K = S Y : P E, est ideo S I : 2 H y = S Y : P E et P E =  $\frac{2 H y \times S Y}{S I}$

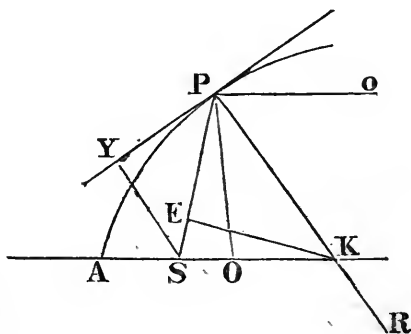


sed H y × S Y = C B<sup>2</sup> et S I = 2 A C, ergo P E =  $\frac{2 C B^2}{2 A C}$  et 2 P E =  $\frac{4 C B^2}{2 A C}$  sed

Latus Rectum L est  $\frac{4 C B^2}{2 A C}$ , ergo 2 P E = L, sive P E est dimidium lateris recti.

237. 1. Corol. Ex eo quod est P S : P K = S Y : P E sive  $\frac{1}{2} L$ , est S Y =  $\frac{L \times P S}{2 P K}$  et P K =  $\frac{L \times P S}{2 S Y}$ .

238. 2. Corol. Hoc Lemma cum suo Corolario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata P O Triangula



P K O, P K E sunt æqualia, propter Angulos rectos in O et E; latus P K commune, et angulum P K O angulo K P E æqualem, ducto





P S (ex notā 40<sup>a</sup>.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proinde spatium quod corpus v illā constante, datō tempore percurreret, et præterea corporis P velocitas, ac tangentis P Q positio data sunt, data est ratio q p sive P v ad P q sive p v, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripetæ eadem maneret et directionem haberet lineæ P S perpetuò parallelam. Cū igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (259.) datur P r, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. *Corol.* Hinc datis in puncto P, curvaturā seu radio oculi P r, positione tangentis P Q, velocitate corporis, et vis centripetā directione P S, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, et vis directionem, datur ratio S P ad S Y et S P<sup>3</sup> ad S Y<sup>3</sup>, sive  $\frac{S P^3}{S Y^3}$  et propter datum

$$Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^2} \text{ datur } \frac{L}{2} \text{ sive } L \text{ latus rectum}$$

principale Parabolæ cujus arcus  $Pp$  est portio,  
 $PS$  Diameter et  $PQ$  Tangens unde datur tota  
 Parabolæ et Latus rectum Diametri  $PS$ ; de-  
 nique tum data sit velocitas corporis in  $P$  datur  
 lineola  $Pq$ , vel  $p$  v dato tempore descripta, da-  
 tur ergo abscissa  $Pv$  sive  $q$  p quæ est vis cen-  
 tripetæ quantitas absoluta.

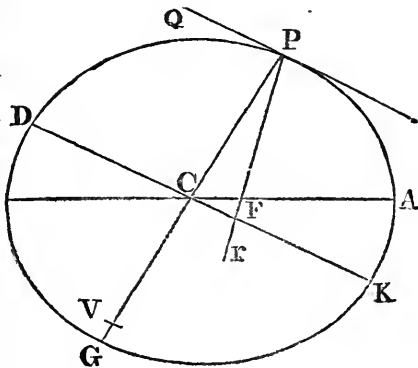
Datis verò in  $P$ , vis centripeta quantitate absoluta, vis illius directione  $PS$ , positioe tangentis  $PQ$ , radio osculi  $Pr$ , sive data curvatura, datur velocitas corporis in  $P$ ; et generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripeta quantitate absoluta, illius directione, velocitate corporis, positioe tangentis et curvatura, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. *Theor.* Corpus P, circa centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis a centro S distantis vis centripetæ agit, positio tangentis P Q, et curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circa centrum virium S, potest describere.—*Dem.* Quoniam datur centrum virium S et punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proinde ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundum quam projicitur corpus, velocitæ projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitatis, ut et nova distantia a centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis a Centro distantis, datur iterum in puncto novo p, vis centripetæ, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successive determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. d.

*Corol.* Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam  $PpB$  quam corpus  $P$  des-

cribit osculetur in  $P$ , quæque proinde eandem habet tangentem  $PQ$ , ut potè radio oculi  $P$ , perpendicularem, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus  $P$ , hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba NEWTONI ferè usurpandò, orbes duo se mutuò osculantes eàdem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia a centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium. aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focus coëuntibus.



Data sint centrum virium  $C$ , et vis centripetæ quantitas absoluta, data a centro distantia  $CP$ , et corpus datâ cum velocitate secundum directionem datam rectæ  $PQ$  projiciatur, erit  $PQ$  tangens curvæ describendæ. Si fuerit  $CP$  a tangentem  $PQ$  normalis, et velocitas quâ corpus  $P$ , projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in  $P$ , constante sollicitum acquireret, cadendo per dimidium radium  $PC$ , curva describenda erit circulus cujus centrum  $C$ , et radius  $CP$  (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus  $P$ , aliam curvam describet, in quâ tangens  $PQ$ , non semper erit ad radium vectorem  $CP$  perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergo  $PQ$  ad radium vectorem  $CP$  obliqua, per centrum  $C$  ducatur recta  $CK$ , ipsi  $PQ$  parallela, et radio osculi  $P$   $r$  dato (242.) describatur circulus rectam  $PC$  intersecans in  $V$ ; tùm sumatur  $C.K$ , media proportionalis inter  $CP$ , et  $\frac{1}{2} PV$ , et semidiametris conjugatis,  $CP$ ,  $CK$ , describatur ellipsis  $PDGA$ , ea erit orbita quam corpus  $P$ , describet.—*Dem.* Ellipsis  $PDGA$ , describi potest per corpus aliquod  $A$  sollicitatum vi aliqua centripetâ ad centrum  $C$  tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro  $CP$ , (Prop. X.) ponamus

*Corol. 2.* <sup>(d)</sup> Et æqualia erunt revolutionum in ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsis similibus æqualia sunt (per Corol. 3. et 8 Prop. IV.) in ellipsis autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directè, et arearum particulæ simul descriptæ inversè; id est, ut axes minores directè, et corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, et ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; et propterea (ob æqualitatem rationum directarum et inversarum) in ratione æqualitatis.

*Scholium.*

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; et vis ad centrum infinitè distans jam tendens

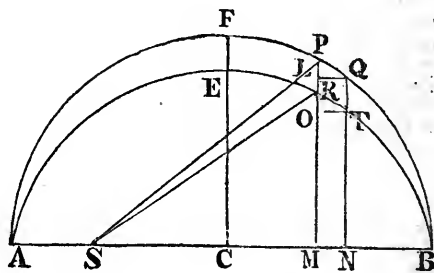
velocitatem corporis A, eandem esse ac velocitatem projectionis corporis P, et ex datâ velocitate corporis illius A, directione tangentis P Q directione vis C P, et curvaturâ Ellipsis in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta (242.) quâ corpus A, in Ellipsi motum retinetur in puncto P, sed eadem est ellipsis illius, et orbitæ quam corpus P describit, curvatura; nam P r est radius circuli ellipsim P D G A osculantis in P, (per const. et secun. demonstr. Newt. Prop. X.) est quoque radius circuli curvam quam corpus P describit osculantis in eodem puncto P, (per constr.) adeoque ellipsis P D G A, et orbita quam corpus P describit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta P Q, orbitæ tangens cum sit diametro C K parallela ellipsim tangit in P, idem est orbitæ et ellipsis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proinde eadem vis illius quantitas absoluta in puncto P, tam in ellipsi quam in orbitâ a corpore P describendâ; cum igitur iis datis corpus P unicam curvam describere possit et reverâ ellipsim P D G A, possit describere, si vis centripeta sit ut distantia a centro (nec circulus describatur) corpus movebitur in Ellipsi centrum habente in centro virium. Q. e. d.

246. Si vis centrifuga sit ut distantia a centro, eodem modo demonstratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.

<sup>(d)</sup> 247. Ut demonstretur æqualia esse revo-

lutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipsis universis ista ex conicis sunt repetenda.

*Lemma.* Area circuli A F B, cujus radius F C æquat semiaxi A C ellipsis A E B, est ad hujus Ellipseos aream ut semiaxis A C, seu F C, ad alterum semiaxem E C.—*Dem.*



Axis A B, divisus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, et per singula divisionum puncta erigantur rectæ P M, Q N, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli et Ellipsis naturâ,  $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$ , erit  $FC : QN = EC : TN$ , et  $FC : EC = QN : TN$ ; verum ejusdem basis rectangula N L, N O, sunt ut altitudines N Q, N T, ac proinde N L : N O

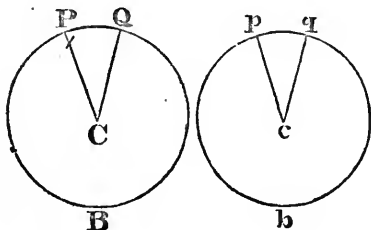
= F C ; E C ; ergo ultima summa rectan-  
gulorum evanescentium ut N L, ad summam  
rectangulorum, evanescentium ut N O, hoc est,  
area circuli ad aream Ellipsis (per Lem. IV.)  
rationem habet semiaxis F C, ad alterum semi-  
axem E C. Q. e. d.

248. *Corol.* 1. Idem eodem prorsus modo demonstratur, si  $A F B$  fuerit Ellipsis communem axem  $A B$ , habens cum Ellipsi  $A E B$ . Et generatim duæ quævis figure  $A F B$ ,  $A E B$ , quarum semiordinate  $Q N$ ,  $T N$ , sunt in datâ ratione et quarum est communis diameter  $A B$ , sunt inter se in ratione datâ ordinatarum  $Q N$ ,  $T N$ .

249. *Corol. 2.* Area circuli cujus diameter est medium proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit  $EC : R = R : FC$ , et radio  $R$ , describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli  $AFB$ , ut  $R^2$  ad  $FC^2$ , adeoque ut  $EC$  ad  $FC$ ; Quare cum Ellipsis  $AEB$ , eandem habeat rationem ad circulum  $AFB$  (247), manifestum est aream circuli radio  $R$ , descripti æqualem esse areæ Ellipsis  $AEB$ .

250. *Corol. 3.* Quoniam  $R^2 = FC \times EC$ , et aræ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt aræ Ellipsium ut axium rectangula.

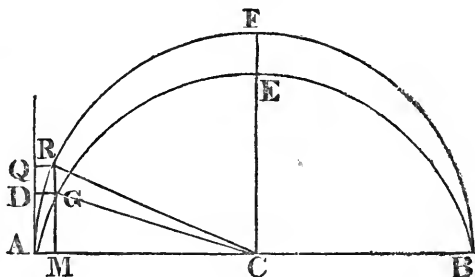
251. *Corol. 4.* Patet etiam in Ellipsis vel ellipsi et circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ  $Q N$ ,  $T N$ , datam habent rationem, et quarum est diameter communis  $A B$ , aream  $M R B$ , esse ad aream correspondentem  $M P B$ , ut est  $E C$ , ad  $F C$ , seu ut  $R M$  ad  $P M$ ; sed ductis ex quocunque diametri puncto  $S$ , rectis  $S P$ ,  $S R$ , est etiam triangulum  $S M R$ , ad triangulum  $S M P$ , ut  $M R$  ad  $M P$ , ob communem utriusque trianguli altitudinem  $M S$ ; ergo sector  $S B R$ , est ad sectorem  $S B P$ , in ratione datâ  $E C$ , ad  $F C$ .



252. *Theor.* Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas P Q B, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ

$p q b$ , ut area  $P Q B P$ , ad aream  $p q b p$ ,  
 directè et sectores  $P C Q$ ,  $p c q$ , simul descripti  
 inversè.—*Dem.* Ob æquabilem arearum circa  
 centra  $C$ ,  $c$ , descriptionem (Prop. I.) tempus pe-  
 riodicum  $T$ , in orbe  $P Q B$ , est ad tempus  $t$ ,  
 quo describitur sector  $P C Q$ , ut area  $P Q B P$ ,  
 ad sectorem  $P C Q$ , et similiter tempus  $t$ , quo  
 describitur sector  $p c q$ , est ad tempus pe-  
 riodicum  $\ell$ , in orbe  $p q b$ , ut sector  $p c q$ , ad  
 aream  $p q b p$ , hoc est  $T : t = P Q B P$   
 area :  $P C Q$ , et  $t : \ell = p c q : p q b p$  area,  
 unde per compositionem rationum et ex æquo  
 $T : \ell = P Q B P \times p c q : p q b p \times P C Q$ .  
 Q. e. d.

255. Si corpora duo Ellipses A E B, A F B, quarum est axis communis A B, describant, viribus ad centrum Ellipsoidum C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.—*Dem.* Sint arcus A R, A G, infinitesimi eodem tempore descripti, A Q tangens ad verticem A, Q R,

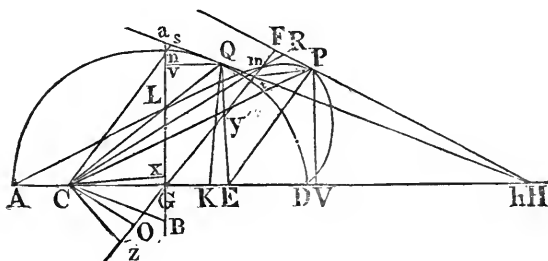
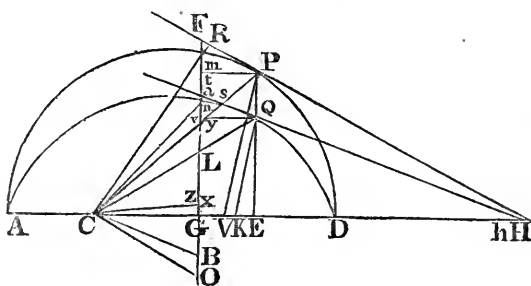


D G, axi A B, parallelæ, et quoniam vires  
centrales sunt ut Q R, D G (Prop. VI.) et ob  
communem distantiam a centro A, æquales  
sunt vires, seu eadem vis (Prop. X.) erit Q R  
 $=$  D G, sectores verò A C G, A C R, sunt  
ut G M, R M, seu E C, F C, (251), et arææ  
Ellipsium A E B, A F B, sunt etiam ut E C,  
F C, (247, 248.) quare cum tempora periodica  
in illis Ellipsis sint ut arææ A E B, A F B  
directè et sectores A C G, A C R, inversè  
(252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, et  
E C ad F C inversè, hoc est, ut  $E C \times F C$  ad  
 $F C \times E C$ , ac proindè in ratione æqualitatis.  
Q. e. d.

254. His positis faciliè demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsis universis circorum centrum idem facturum periodica tempora. Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, et B, describatur tertia Ellipsis C, similis Ellipsi A, et axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsis similibus A et C, sunt æqualia (per Corol. 3. et 8. Prop. IV. Newt.) et tempora periodica in ellipsis C, et B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqua-



datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodo; vires ad centrum quodcunque in abscissâ positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.



triang.  $CLn = Gm \times Cz : Gn \times Cx$   
 $= Gm \times P V \times Gn : Gn \times Q K$   
 $Gm = P V \times Q K$ , et  $P V$  sit ad  $Q K$ ,  
 ut parallelogrammum  $G E P m$ , ad pa-  
 rallelogrammum  $G E Q n$ , hoc est, (per Lem.  
 IV.) et per construct. ut area  $A P D$ , ad aream  
 $A Q D$ ; ergò triangula  $C y m$ ,  $C L n$ , sunt in  
 ratione arcuum  $A P D$ ,  $A Q D$ ; at punctis  
 $m$  et  $P$ ,  $n$  et  $Q$  cōiunctis, sector  $C P m$ ,  
 æquatur triangulo  $C y m$ , et sector  $C Q n$  trian-  
 gulo  $C L n$ ; sunt igitur sectores illi evanes-  
 centes ut areæ  $A P D$ ,  $A Q D$ , directè.  $Q. e. d.$

259. *Theor.* Iisdem manentibus, si tempora periodica in curvis  $APD$ ,  $AQD$  fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus  $P$  et  $Q$  erunt inter se ut distantie a centro  $C$   $P$ ,  $CQ$ .

*Demonst.* Figura A Q D rectis ex centro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, et figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac proinde etiam inter se æquales (258), ut C P m divisæ intelligantur; et ob eundem sectorum in utraque figurâ numerum, æquibum illorum descriptionem (Prop. I.) et æqualia tempora periodica, sectores C P m, C Q n, æquali tempore describentur. Quare (per Prop VI). Vires centripetæ in punctis

P et Q, sunt inter se ut rectæ m R, s n punctis  
m et P, n et Q coëuntibus; verum propter  
Parallelas Q E, a et C P E, F G, est, a G :  
F G = Q E : P E, (257) et quia n G et m G in  
eadem sunt ratione, hinc ex a G et F G subductis  
manent a n ad F m sicut Q E ad P E; ductis  
autem ex C, Parallelis C B, C O ad tangentem  
a, H, F H, Triangula B C G et O G C sunt  
similia triangulis a G H, F G H unde est

$BG : a = G : G C : G H$   
 et  $O G : F G = G C : G H$  ideo-  
 que  $BG : O G = G : F G = Q E : P E =$   
 $n G : m G$  et jungendo terminos primæ et se-  
 cundæ rationis terminis ultimæ est  $B n : O m$   
 $= Q E : P E = a : f$  M. Denique quia ob  
 $C B, C O, T$ angentibus  $a H, F H$  Parallelas,  
 similia etiam sunt Triangula,  $a n s$  et  $n C B,$   
 $F m R$  et  $m C O$ , est

B n : n a = C n : s n  
et est F m : m O = R m : m C, et Composi-  
sitis Rationibus est B n × F m : n a × m O  
= C n × R m : s n × m C, sed quia B n :  
O m = a : F m, est B n × F m = a n ×  
O m, ergo etiam C n × R m = s n × m C,  
ideoque C n : C m = R m : s n; sive dis-  
tantiæ a Centro in eadem sunt ratione ac vires  
Centrales.

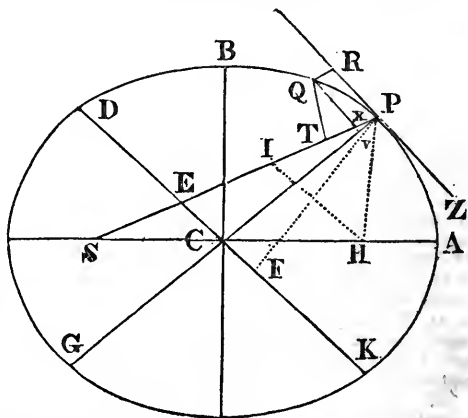
## SECTIO III.

*De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.*

## PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

*Revolvatur corpus in ellipsi : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.*

Est ellipseos umbilicus S. Agatur SP secans ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, et compleatur parallelogrammum QxPR. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ HI ipsi EC parallêlâ, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI, <sup>(g)</sup> adeo ut EP semi-summa sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR, et angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum 2AC adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, et ellipseos latere recto principali (seu <sup>(h)</sup>  $\frac{2BC^2}{AC}$  quad.) dicto L, erit L



$\times QR$  ad  $L \times Pv$  ut  $QR$  ad  $Pv$  <sup>(i)</sup> id est, ut PE seu AC ad PC

<sup>(g)</sup> 260. Quia (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH, PS, constituunt cum tangente PR, et ob parallelas HI, PR, æquales quoque sunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeoque  $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$ , (Prop. 52. Lib. 3. Conic. Apoll. superius Theor. III. de Ellip.)

<sup>(h)</sup> 261. In Ellipsi et Hyperbolâ latus rectum principale  $L = \frac{2BC^2}{AC}$  nam  $2AC : 2BC = 2BC : L$ , undè  $L = \frac{4BC^2}{2AC} = \frac{2BC^2}{AC}$ .

<sup>(i)</sup> Per constructionem  $QR = Px$ , sed propter Triangula similia  $Pxv$ ,  $PEC$ ,  $Px : Pv = PE(A C) : PC$ , ergò  $QR : Pv = AC : PC$ .

et  $L \times P v$  ad  $G v P$  ut  $L$  ad  $G v$ ; et  $(^k) G v P$  ad  $Q v$  quad. ut  $P C$  quad. ad  $C D$  quad. et (per Corol. 2. Lem. VII.)  $Q v$  quad. ad  $Q x$  quad. punctis  $Q$  et  $P$  coëuntibus est ratio æqualitatis; et  $Q x$  quad. seu  $Q v$  quad. est ad  $Q T$  quad. ut  $E P$  quad. ad  $P F$  quad.  $(^l)$  id est, ut  $C A$  quad. ad  $P F$  quad. sive (per Lem. XII.) ut  $C D$  quad. ad  $C B$  quad.  $(^m)$  Et conjunctis his omnibus rationibus,  $L \times Q R$  fit ad  $Q T$  quad. ut  $A C \times L \times P C q \times C D q$ , seu  $2 C B q \times P C q \times C D q$  ad  $P C \times G v \times C D q \times C B q$ , sive ut  $2 P C$  ad  $G v$ . Sed punctis  $Q$  et  $P$  coëuntibus æquantur  $2 P C$  et  $G v$ . Ergo et his proportionalia  $L \times Q R$  et  $Q T$  quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in  $\frac{S P q}{Q R}$ , et fiet  $L \times S P q$  æquale  $\frac{S P q \times Q T q}{Q R}$ . Ergo (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut  $L \times S P q$ , id est, reciprocè in ratione duplicata distantiae  $S P$ . Q. e. i.

*Idem aliter.*

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus  $P$  in ellipsi illâ revolvitur potest, sit (per Corol. 1. Prop. X.) ut  $C P$  distantia corporis ab ellipseos centro  $C$ ; ducatur  $C E$  parallela ellipseos tangenti  $P R$ ; et vis, quâ corpus idem  $P$  circum aliud quodvis ellipseos punctum  $S$  revolvitur potest, si  $C E$  et  $P S$  concurrant in  $E$ ,  $(^n)$  erit ut  $\frac{P E \text{ cub.}}{S P q}$  (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus ellipseos, ideoque  $P E$  detur, ut  $S P q$  reciprocè. Q. e. i.

$(^k)$  Per naturam Conicorum, facta partium Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ. (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi et de Hyperbolâ.)

$(^l)$  Est  $C A^2 : P F^2 = C D^2 : C B^2$ : nam per Lem. XII.  $P F \times C D = A C \times B C$ ; adeoque  $P F^2 \times C D^2 = C A^2 \times B C^2$ , ac proinde  $C A^2 : P F^2 = C D^2 : C B^2$ .

$(^m)$  262. Scriptis seorsim analogiis res clara sit.

$$L \times Q R : L \times P v = A C : P C$$

$$L \times P v : G v P = L : G v$$

$$G v P : Q v^2 = P C^2 : C D^2$$

$$Q v^2 : Q T^2 = C D^2 : C B^2$$

Undè conjunctis his omnibus rationibus  $L \times Q R : Q T^2 = A C \times L \times P C^2 \times C D^2 : P C \times G v \times C D^2 \times C B^2$ , hoc est, ob  $A C \times L = 2 B C^2$ ,  $L \times Q R : Q T^2 = 2 P C : G v$ , et ob  $2 P C = G v$ ,  $L \times Q R$

$$= Q T^2, \text{ et } L = \frac{Q T^2}{Q R}.$$

$(^n)$  Nam (per Corol. 3. Prop. VII.) vis tendens ad centrum  $C$ , quam exponat recta  $C P$ , est ad vim tendentem ad aliud punctum  $S$ , quam exponat recta  $A$ , ut  $C P \times S P^2$  ad cubum rectæ quæ a centro  $A$  ad Tangentem  $R P Z$  duceretur parallela ad lineam  $S P$  a secundo virium centro ad punctum  $P$  curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret  $P E$ , quoniam ipsi esset Parallela et inter easdem Parallelas  $D C$ ,  $R P Z$ , adeoque  $C P \times S P^2 : P E^3 = C P : A = \frac{P E^3}{S P^2}$ ; hoc est, si punctum  $S$  sit umbilicus Ellipseos, adeoque  $P E = A C$  (260) detur, erit vis ut  $S P^2$  reciprocè; hic, autem supponitur talem esse vim ad centrum  $C$  tendentem ut tempora periodica circa centra  $C$ , et  $S$ , æqualia sint, quod supponi potest.

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, et hyperbolam, liceret idem hic facere : verum ob dignitatem problematis, et usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

## PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

*Moveatur corpus in hyperbolâ : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.*

Sunto C A, C B semiaxes hyperbolæ; P G, K D, diametri aliæ conjugatæ; P F perpendiculum ad diametrum K D; et Q v ordinatim applicata ad diametrum G P. Agatur S P secans cum diametrum D K in E, tum ordinatim applicatam Q v in x, et compleatur parallelogrammum Q R P x. (°) Patet E P æqualem esse semiaxi transverso A C, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ H I, ipsi E C parallelâ, ob æquales C S, C H æquentur E S, E I; adeo ut E P semidifferentia sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas I H, P R et angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quarum differentia axem totum 2 A C adæquat. Ad S P demittatur perpendicularis Q T. Et hyper-

bolæ latere recto principali (seu  $\frac{2 B C q}{A C}$ ) dicto L, erit L x Q R ad L x P v ut Q R ad P v, seu P x ad P v, id est (ob similia triangula P x v, P E C) ut P E ad P C, seu A C ad P C. Erit etiam L x P v ad G v x P v ut L ad G v; et (ex naturâ conicorum) rectangulum G v P ad Q v quad. ut P C q ad C D q; et (per Corol. 2. Lem. VII.) Q v quad. ad Q x quad. punctis Q et P coëuntibus sit ratio æqualitatis; et Q x quad. seu Q v quad. est ad Q T q ut E P q ad P F q, id est, ut C A q ad P F q, sive (per Lem. XII.) ut C D q ad C B q: et conjunctis his omnibus rationibus L x Q R fit ad Q T q ut A C x L x P C q x C D q, seu 2 C B q x P C q x C D q ad P C x G v x C D q x C B q, sive ut 2 P C ad G v. Sed punctis P et Q coëuntibus æquantur 2 P C et G v. Ergo et his proportionalia L x Q R et Q T q (P) æquantur. Ducantur hæc

(°) 263. Est  $SE = SP + PE$  et ob æquales E S, E I, est  $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2 PE$ , ac proinde  $PI - SP = 2 PE$ , ac P E est semidifferentia ipsarum P S, P I; sed angulus H P R = R P S, angulus enim interceptus inter lineas a focus ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) et R P S =

E P Z (per 15. 1. Elem.) adeoque I P R = H P Z, et ob parallelas I H, P R, angulus P H I = H P R = I P Z = H I P, unde H P = P I, adeoque E P, est semidifferentia ipsarum P S, P H, et quia differentia rectarum P S, P H, axem totum 2 A C, adæquat (per Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hyperb.) est E P = A C.

(P) 264. Notandum est quod in hyperbolâ





## LEMMA XIII.

(<sup>r</sup>) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiae verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

## LEMMA XIV.

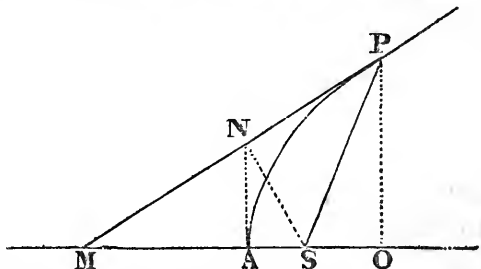
*Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus et a vertice principali figuræ.*

Sit enim A P parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, P O ordinatim applicata ad diametrum principalem, P M tangens diametro principali occurrens in M, et S N linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur A N et ob æquales M S et S P, M N et N P, M A et A O parallelæ erunt rectæ A N et O P; et inde triangulum S A N rectangulum erit ad A, et simile triangulis æqualibus S N M, S N P: ergo P S est ad S N ut S N ad S A. Q. d. e.

*Corol. 1.* P S q est ad S N q ut P S ad S A.

(<sup>s</sup>) *Corol. 2.* Et ob datam S A est S N q ut P S.

*Corol. 3.* Et concursus tangentis cujusvis P M cum recta S N, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam A N quæ parabolam tangit in vertice principali.



describit ad vim centrifugam a foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut  $C P \times H P^2$  ad  $P E^3$ . Vim a centro C, tendentem quæ est ut C P, exponat recta C P, et alteram vim à foco H directam exponat recta A, et erit  $C P \times H P^2 : P E^3 = C P : A = \frac{P E^3}{H P^2}$  hoc est, ob P E æqualem datæ A C, vis a foco H tendens est reciprocè ut  $H P^2$ .

(<sup>r</sup>) 266. *Dem.* Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

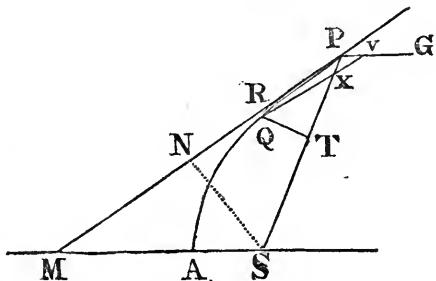
(<sup>s</sup>) Cum sit (per Coroll. 1.)  $S A \times P S^2 = S N^2 \times P S$ , adeoque  $S A \times P S = S N^2$ ; erit ob datam S A,  $S N^2$  ut P S, id est, variationes quadrati  $S N^2$ , in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ S P sive ut distantie a foco.

## PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

*Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.*

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, et a loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR et perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, et occurrentem tum diametro PG in v, tum distantie SP in x. Jam. ob similia triangula (\*) Pxv, SPM, et æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR et Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto et segmento diametri Pv, id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4PS × Pv, seu 4PS × QR; et punctis P et Q coëuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx

quad. eo in casu æquale est rectangulo 4PS × QR. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id est, ut 4PS × QR ad 4SA × QR, et inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) (u) QTq et 4SA × QR æquantur.



Ducantur hæc æqualia in  $\frac{SPq}{QR}$ , et fiet  $\frac{SPq \times QTq}{QR}$  æquale SPq × 4SA: et propterea (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut SPq × 4SA, id est, ob datam 4SA reciproce in duplicatâ ratione distantie SP. Q. e. i.

*Corol. 1.* (\*) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quâcunque

(\*) \* Nam ob parallelas MP et Qv, MS et PG, est angulus vPx = PSM et Pxv = QxT = MPS.

(u) 267. Quoniam latus rectum principale L = 4AS, et est 4AS × QR = QT<sup>2</sup>, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale L =  $\frac{QT^2}{QR}$ .

(\*) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum ab umbilico, et contrâ si vis centripeta fuerit quadrato distantie

a centro virium reciproce proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum.—Dem. Prima pars propositionis a NEWTONO eleganter demonstrata, potest adhuc aliter et generatim demonstrari. Vis centripeta ut  $\frac{SP}{SY^3 \times R}$  (212.) sed in omni sectione conicâ R =  $\frac{L \times SP^3}{2SY^3}$  (239.) Ergo  $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$  hoc est, ob datam  $\frac{2}{L}$ , vis est ut  $\frac{1}{SP^2}$  Q. c. 1<sup>um</sup>.



lineola P R in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; et vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium Q R. movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa  $(r) \frac{Q T q}{Q R}$ , quæ ultimo fit, ubi lineolæ P R, Q R in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad ellipsin; et casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

*Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciproce in duplicatâ ratione distantie locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.*

(<sup>z</sup>) Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum  $L$  æquale est

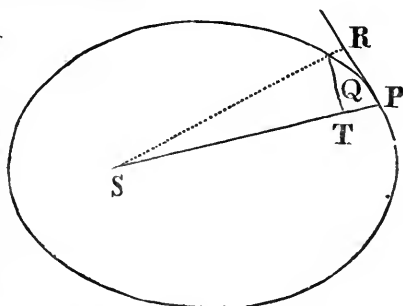
quantitati  $\frac{QT_q}{QR}$ , quæ ultimo fit,

ubi coëunt puncta P et Q. Sed linea minima Q R dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciprocè ut S P q. Ergo

$$\frac{Q T_q}{Q R} \text{ est ut } Q T_q \times S P_q, \text{ hoc est,}$$

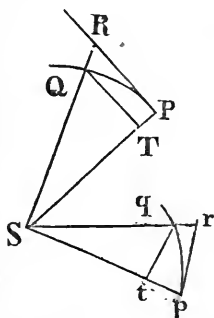
latus rectum  $L$  in duplicatâ ratione areæ  $Q T \times S P$ .  $Q. e. d.$

*Corol. (\*)* Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, et



(y) \* Patet ex notâ 267.

(2) 269. Sint in Hypothesi propositionis xiv. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi  $PQ$ ,  $pq$ , simul descripti,  $L$ ,  $l$ , earumdem latera recta, (et per Prop. VI. et

$$\begin{aligned} \text{Hyp.) } Q R : q r &= \\ S p^2 : S P^2. \text{ Sed} \\ (267.) \frac{Q T^2}{Q R} : \frac{q t^2}{q r} \\ &= I : i = \frac{Q T}{S p^2} : \frac{q t}{S P^2} \end{aligned}$$
$$= Q T^2 \times S P^2 : q t^2 \times S p^2. \text{ Sunt autem } Q T \times S P, q t \times S p, \text{ ut sectores evanescentes}$$


$SQ P$ ,  $Sq p$ , ergò latera recta  $L$ ,  $l$ , sunt in duplicatâ ratione ararum simul descriptarum : nam aræ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores  $SQ P$ ,  $Sq p$ , simul descripti, ob æquabilem circâ centrum virium.  $S$  ararum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati aræ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum et contrâ, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(2.) 270. *Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axis* (250.) *est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti et ratione temporis periodici.* Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directè et area tempore dato descripta inversè, adeoque area tota est ut area  $Q T \times S P$  quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area  $Q T \times S P$ , quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

### PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

*Isdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquuplicatâ majorum axium.*

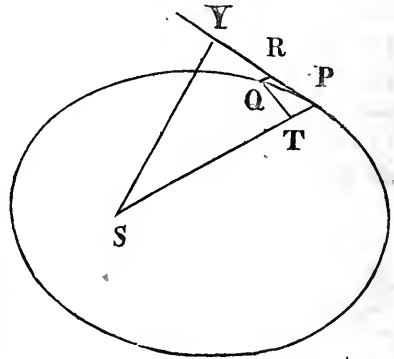
(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem et latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicatâ ratione lateris recti et sesquuplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti et ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, et manebit sesquuplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. e. d.

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

### PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

*Isdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendicularium inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.*

Ab umbilico S ad tangentem P R demitte perpendicularum S Y, et velocitas corporis P erit reciproce in subduplicatâ ratione quantitatis  $\frac{S Y q}{L}$ . Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus P Q in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens (d) P R, id est, ob proportionales P R ad Q T et S P ad S Y, ut  $\frac{S P \times Q T}{S Y}$ ,



(b) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; et quoniam  $A : B = B : L$ , erit  $B^2 = A \times L$ ,  $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ ,  $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ , sed rectangulum  $A \times B$ , (270.) est ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , ergo  $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$  est ut  $T \times L^{\frac{1}{2}}$ , et dividendo utrumque terminum per  $L^{\frac{1}{2}}$  erit  $A^{\frac{3}{2}}$  ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt et Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsis quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergo in Ellipsi et circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

(d) \* Velocitas est ut tangens P R, sed ob an-

sive ut  $SY$  reciproce et  $SP \times QT$  directe; estque  $SP \times QT$  ut area dato tempore descripta, id est (per Prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. Q. e. d.

*Corol. 1.* <sup>(e)</sup> Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum, et duplicatâ ratione velocitatum.

*Corol. 2.* Velocitates corporum, in <sup>(f)</sup> maximis et minimis ab umbilico communi distantis, sunt in ratione compositâ ex ratione distantiarum inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantiae.

*Corol. 3.* <sup>(g)</sup> Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

*Corol. 4.* <sup>(h)</sup> Corporum in ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciproce in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semiaxes minores, et hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias et latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directe, et fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

*Corol. 5.* In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

*Corol. 6.* <sup>(i)</sup> In parabolâ velocitas est reciproce in subduplicatâ rati-

gulos ad  $T$  et  $Y$  rectos et angulos  $QPT$ ,  $YPS$ , punctis  $P$ ,  $Q$ , coëuntibus æquales, triangulum evanescens  $QPT$ , simile erit triangulo  $PSY$ , adeoque  $QP$  ( $PR$ ):  $QT = SP : SY$ , et  $PR = \frac{SP \times QT}{SY}$ .

<sup>(e)</sup> \* Velocitatis quadratum  $c^2$ , est directe ut  $\frac{L}{SY^2}$  (Prop. XVI.). ergo  $L$  est ut  $c^2 \times SY$ .

<sup>(f)</sup> \* Maximæ et minimæ distantie sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cum illic axis sit perpendicularis tangenti, ipsa perpendiculara ad tangentem in maximis et minimis distantis sunt ipsæ distantie; mediocres distantie sunt distantie ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeoque semiaxi majori æquantur.

<sup>(g)</sup> \* Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quam in circulo, velocitates sunt in sub-

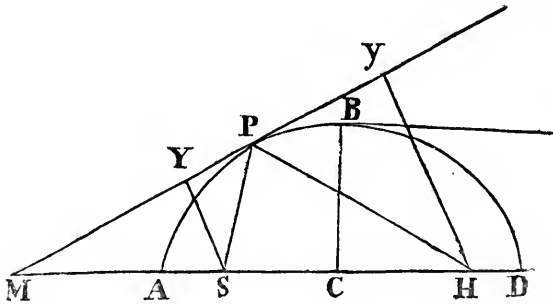
duplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

<sup>(h)</sup> \* Sit  $A$  corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam circuli radius  $A$ ; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit  $B$ , latus rectum  $L$ , et circuli latus rectum (272.) erit  $2A$ , velocitas in Ellipsi sit  $C$ , in circulo  $c$ , et erit (per Prop. XVI.)  $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$ ; sed ex Conicis distantia a foco ad extremitatem semiaxis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia  $A$  semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit  $A : B = 2B : L$ , est  $2B^2 = A \times L$ , ergo  $C^2 = c^2$ , et  $C = c$ .

<sup>(i)</sup> In Parabolâ velocitas est reciproce in subduplicatâ ratione distantie corporis ab umbilico figuræ; cum enim velocitas sit reciproce ut per-

one distantiae corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi magis variatur, in hyperbolâ minus quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiae. In hyperbolâ perpendicularum minus variatur, in ellipsi magis.

*Corol. 7.* (\*) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a



pendiculum demissum ab umbilico ad Tangentem, per præced. Coroll. et (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculari sit semper in Parabolâ ut distantia a foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius distantiae a foco, sive in subduplicatâ ratione distantiae, &c.

276. *Lemma.* Sit Ellipsis A P B, cujus axis major A D, foci S et H, semiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y et H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellip.) similia sunt triangula S P Y, H P y, unde S P : S Y = H P : H y = S Y × H P / S P, ac proinde S Y × H y =

$$\frac{S Y^2 \times H P}{S P} = B C^2 \text{ (ex conicis. Vid. sup. n. 236.)}$$

sed H P + S P = A D (Prop. 52. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipsi)

$$\text{unde est } H P = A D - S P \text{ ergo } \frac{S Y^2 \times A D - S P}{S P}$$

$$= B C^2; \text{ et } S Y^2 = \frac{B C^2 \times S P}{A D - S P} \text{ Ergo}$$

in Ellipsi, S Y variatur in ratione  $\frac{B C^2 \times S P}{A D - S P}$

sive ob quantitatem B C<sup>2</sup>, constantem in ratione  $\frac{S P}{A D - S P}$ .

Crescat distantia S P, minor fiet A D - S P, si non mutaretur denominator fractionis

$$\frac{S P}{A D - S P} = S Y^2, \text{ cresceret } S Y^2 \text{ sicut}$$

S P, cum autem minuatur denominator S P crescente, eo ipso major fit valor fractionis

$\frac{S P}{A D - S P}$  ergo crescente S P, S Y<sup>2</sup> magis crescit quam in solâ ratione S P, ergo perpendicularum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiae S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam H P - S P = A D (Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) et H P = A D + S P, eodem modo reperitur S Y<sup>2</sup> =  $\frac{B C^2 \times S P}{A D + S P}$

et crescente S P, crescit etiam A D + S P, si idem maneret denominator cresceret S Y<sup>2</sup> sicut

cut S P, denominatore aucto, fractio  $\frac{S P}{A D + S P}$

fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculari S Y, ergo S Y<sup>2</sup> minus crescit quam S P sive perpendicularum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiae S P.

(\*) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeoque distantia foci a vertice  $\frac{1}{2} L$ , et ex umbilico tanquam centro ac radio  $\frac{1}{2} L$ , describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit  $\frac{1}{2} L$ : unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut  $\sqrt{L}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} L}$ , hoc est, ut  $\sqrt{2}$  ad 1. (Corol. 2. hujusce Prop.) sed per Corol. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico distantia S P, ut  $\sqrt{S P}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} L}$ , et (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} L$ , est etiam ad



centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem ; (1) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, et per corollaria sexta hujus et propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolvantis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

*Corol. 8.* Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. (m) Patet per corollarium quintum.

*Corol. 9.* (n) Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-

velocitatem in alio circulo cujus radius S P, ut  $\sqrt{S P}$ , ad  $\sqrt{\frac{1}{2} L}$ ; quare velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eadem parabolâ ad distantiam S P, ut velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} L$ , ad velocitatem in circulo cujus radius est S P, ac proinde alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radii  $\frac{1}{2} L$  descripto; hoc est,  $\sqrt{2}$  ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantia S P, ad velocitatem in circulo ad eandem a centro seu umbilico distantiam descripto.

273. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolvantis in circulo ad dimidiam distantiam; nam velocitas in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} S P$  est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, ut  $\sqrt{2}$  ad 1, (per Corol. 6. Prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam S P, est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, etiam ut  $\sqrt{2}$  ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam S P, æquatur velocitati in circulo cujus radius  $\frac{1}{2} S P$ .

(l) 279. In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolvantis in circulo ad eandem a centro distantiam in minore ratione quàm  $\sqrt{2}$  ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore. Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum L, distantia ab umbilico S P, perpendicularum ad tangentem sectionis in puncto P demissum S Y; S P, sit radius circuli, c sit velocitas in Ellipsi vel hyperbola ad distantiam S P; C, velocitas in circulo, et erit (per Prop. XVI.)  $c^2 : C^2 =$

$$\frac{L}{S Y^2} : \frac{2 S P}{S P^2} = L \times S P : 2 S Y^2; \text{ sed (276) } \\ 2 S Y^2 = \frac{2 B C^2 \times S P}{A D \mp S P}, \text{ ergo } c^2 : C^2 = L \\ \times S P : \frac{2 B C^2 \times S P}{A D \mp S P} = L \times \frac{A D \mp S P}{2 B C^2}; \text{ et ob } L \times A D = 4 B C^2 \text{ seu } 2 B C^2 \\ = \frac{L \times A D}{2}, \text{ est } c^2 : C^2 = 2 A D \mp \\ 2 S P : A D; \text{ undè in Ellipsi in quâ } 2 S P$$

Vol. I.

habet signum —, ratio  $c^2$  ad  $C^2$ , minor est quam ratio 2, ad 1, et ratio c ad C, minor quam ratio  $\sqrt{2}$ , ad 1; in hyperbolâ major ob  $+ 2 S P$  (276.)

280. Corol. Quoniam distantia ab altero sectionis foco H P = A D  $\mp$  S P, erit  $c^2$ .  $C^2 = 2 H P : A D = H P : \frac{1}{2} A D$ , hoc est, velocitas in Ellipsi et hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro virium distantiam S P est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantie H P ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

(m) \* Nam iste circulus et sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia a Centro semi-diametro æquatur et tota diameter est latus Rectum, ideo velocitates sunt reciproce ut perpendiculara in Tangentem demissa (per Cor. 5 hujusce) sed in circulo semidiameter perpendicularo æquatur, ergo velocitates in sectione et in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendicularum, &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti  $\frac{1}{2} L$ , c velocitas in sectione conicâ ad distantiam S P, K velocitas in circulo ad eandem distantiam S P, et erit (per Corol. 8.)  $c^2 : C^2 = \frac{1}{2} L^2 : S Y^2$  (et per Cor. 6. Prop. IV.)  $C^2 : K^2 = S P : \frac{1}{2} L$ , undè, ex æquo,  $c^2 : K^2 = S P \times \frac{1}{2} L^2 : S Y^2 \times \frac{1}{2} L = S P \times \frac{1}{2} L : S Y^2$ . Fiat S P : m = m :  $\frac{1}{2} L$ , et erit  $m^2 = S P \times \frac{1}{2} L$ , ac proinde  $c^2 : K^2 = m^2 : S Y^2$  et c : K = m : S Y.

282. Sit C, centrum Ellipsis, C B semiaxis minor, foci S et H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantie H P a foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c, et erit (per Cor. 5. Prop. XVI.)  $C : c = C B : S Y$ , adeoque  $C^2 : c^2 = C B^2 : S Y^2$ , hoc est, ob  $C B^2 = S Y \times H Y$  (235.)  $C^2 : c^2 = S Y \times H Y : S Y^2 = H Y : S Y$ ; sed ob similia

I

tis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciproce in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem distantîâ, ut media proportionalis inter distantiam illam communem et semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

## PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

*Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.*

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ p q gyretur, et cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam P R exeat corpus P cum datâ velocitate, et mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni sectionem P Q. Hanc igitur recta P R tanget in P. Tangat itidem recta aliqua p r orbitam p q in p, et si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur per-

triangula S P Y, H P y, H y : S Y = H P : S P. Ergò C<sup>2</sup> : c<sup>2</sup> = H P : S P, et C : c = H P<sup>1/2</sup> : S P<sup>1/2</sup>, Q. e. d.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

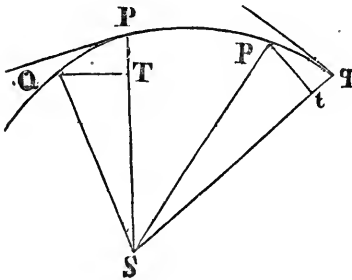
283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolvantis seu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo describit est directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem S P, et distantia S P inversè, dum puncta Q et P cœunt, nam linea perpendicu-

laris Q T pro arcu circuli haberi potest, undè angulus P S Q =  $\frac{Q T}{S P}$  (155.)

284. Corol. 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciproce in duplicatâ ratione distantiae SP a centro virium S. Nam sectores P S Q, p S q, eodem tempusculo descripti sunt æquales (Prop. I.) Undè Q T × S P = q t × S p, adeoque Q T : q t = S p : S P, et hinc  $\frac{Q T}{S P} : \frac{q t}{S p} = \frac{S p}{S P} : \frac{S p}{S p} = S p^2 : S P^2$ .

285. Corol. 2. Velocitates angulares in sectionibus conicis circâ umbilicum communem seu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè et quadrata distantiarum inversè. Nam, (per Prop. XIV.) Latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione sectorum P S Q, p S q, simul descriptorum, seu  $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = Q T \times S P :$

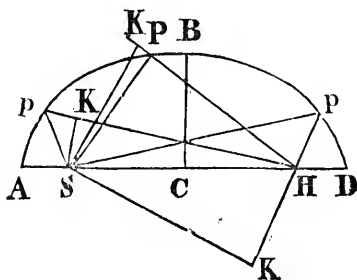
$q t \times S p$ , adeoque  $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{S P} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{S p} = Q T : q t$ ; et hinc velocitates angulares seu anguli minimi P S Q, p S q, hoc est,  $\frac{Q T}{S P}, \frac{q t}{S p}$ , sunt ut  $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{S P^2}, \frac{l^{\frac{1}{2}}}{S p^2}$ .





gatus B C, <sup>(b)</sup> et erit  $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHQ - 4BCq = \overline{SP + PH}$ : quad. —  $L \times \overline{SP + PH}$  <sup>(c)</sup>  $= SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$ . Addantur utrobique  $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$ , et fiet  $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$ , seu  $SP + PH$  ad  $PH$  ut  $2SP + 2KP$  ad  $L$ . Unde datur  $PH$  tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in  $P$  velocitas, ut latus rectum  $L$  minus fuerit quam  $2SP + 2KP$ , jacebit  $PH$  ad eandem partem tangentis  $PR$  cum linea  $PS$ ; ideoque figura erit ellipsis, et ex datis umbilicis  $S, H$ , et axe principali  $SP + PH$ , dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum

<sup>(b)</sup> Erit  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$ , Etenim (per 12. et 13. 2. Elem.) in omni triangulo  $SPH$ , quadratum lateris  $SH$

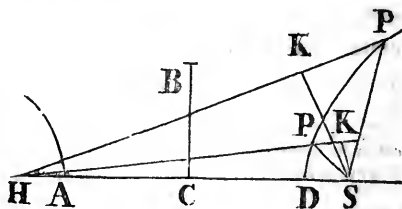


quod consideratur ut hypothenusa anguli  $P$ , æquatur quadratis aliorum laterum  $SP, PH$  dempto duplo rectanguli lateris  $PH$  in quod cadit perpendicularum, ducti in partem  $PK$  ab angulo  $P$  ad perpendicularum usque interceptam, quæ quidem  $PK$  sumitur cum signo + si sit ab eadem parte tangentis ac  $S$  et cum signo — si sit in parte opposita.

<sup>(c)</sup> 287.  $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ , &c. Ex naturâ ellipseos est  $2BH$  æqualis axi majori  $2AC$  ideoque æqualis  $SP + PH$  et  $4BH^2 = \overline{SP + PH}^2$ , pariter est  $2AC : 2BC = 2BC : L$  est ergo  $4BC^2 = L \times 2AC$  sive  $L \times \overline{SP + PH}$  unde est  $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$ .

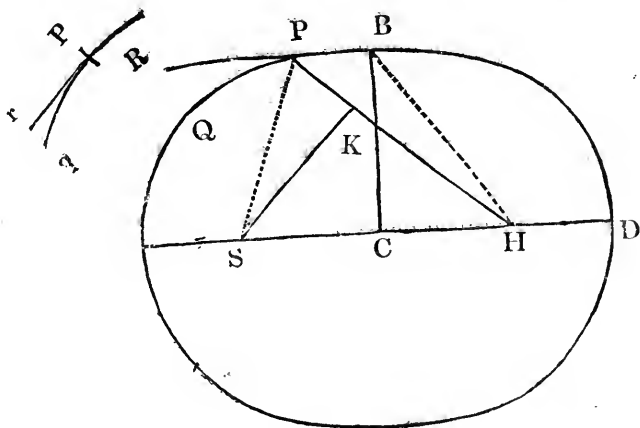
Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis  $SH^2$ , est  $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$ , utrinque detractis æqualibus manet  $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP + PH}$  transpositisque partibus negativis est  $L \times \overline{SP + PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$  sive  $2\overline{SP + 2KP} \times PH$

unde est  $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$  et dividendo  $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$  unde quo magis accedit valor lateris recti  $L$  ad quantitatem  $2SP + 2KP$ , eo major est  $PH$  respectu  $SP$ , si  $L = 2SP + 2KP$ , infinitum est  $SP$  respectu  $PH$ , hoc est, ellipsis abit in parabolam, si  $L$  sit majus quam  $2SP + 2KP$ , primus terminus proportionis fit negativus, ideoque  $PH$  in partem oppositam tangentis cadet et sectio fiet hyperbola; manentibus autem cæteris crescit latus rectum cum velocitate in puncto  $P$  datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in parabolâ movetur, et tandem in hyperbolâ.



288. Demonstratio pro hyperbolâ ita instituitur: Quia  $PK$  non est in eadem parte tangentis ac  $S$ , sumitur  $PK$  cum signo — ideoque est  $SH^2 = SP^2 + 2KP \times PH + PH^2$ , et per naturam hyperbolæ  $SH^2 = 4CH^2 = 4CA^2 + 4CB^2$  sive quia.  $2CA = PH - SP$  et  $4CB^2 = L \times 2CA$  est  $SH^2 = PH^2 - 2SP \times PH + SP^2 + L \times PH - SP$  unde collatis valoribus  $SH^2$  et detractis quantitibus communibus est  $2KP \times PH = -2SP \times PH + L \times PH - SP$  et transpositis quantitibus negativis est  $2KP \times PH + 2SP \times PH = L \times PH - SP$  unde est  $2SP + 2KP : L = PH - SP : PH$ , et convertendo  $L - 2SP - 2KP : L = SP : PH$ .

L æquale fuerit  $2 SP + 2 KP$ , longitudo  $PH$  infinita erit; et propterea figura erit parabola axem habens  $SH$  parallelum lineæ  $PK$ , et inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo



$P$  exeat, capienda erit longitudo  $PH$  ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum  $SP$  et  $PH$ , et inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in Prop. XI, XII, et XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiae corporis a centro virium  $S$  reciproce; ideoque linea  $PQ$  rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato  $P$ , cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam  $PR$  egrediens. Q. e. f.

*Corol. 1.* Hinc in omni conî sectione ex dato vertice principali  $D$ , latere recto  $L$ , et umbilico  $S$ , datur umbilicus alter  $H$  capiendo  $DH$  ad  $DS$  ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum et  $4 DS$ .<sup>(d)</sup> Nam proportio  $SP + PH$  ad  $PH$  ut  $2 SP + 2 KP$  ad  $L$  in casu hujus corollarii, fit  $DS + DH$  ad  $DH$  ut  $4 DS$  ad  $L$ , et divisim  $DS$  ad  $DH$  ut  $4 DS - L$  ad  $L$ .

*Corol. 2.* Unde si datur corporis velocitas in vertice principali  $D$ , invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam  $DS$ , in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam  $DS$  gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.);

<sup>(d)</sup> 289. In casu hujus corollarii punctum  $P$  omni sectione conicâ est  $DH$ , ad  $DS$ , ut latus cedit in  $D$ , punctum  $K$  cedit in  $S$ , fitque  $PK$  rectum ad differentiam inter latus rectum et  $= DS = SP$ , et  $PH = DH$ . Quare in  $4 DS$ .

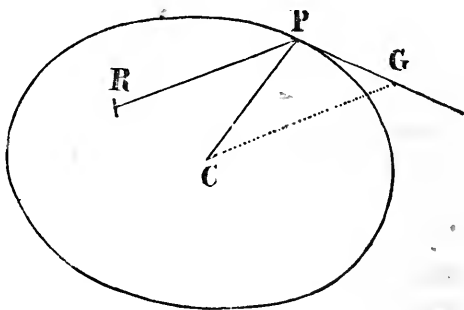
dein D H ad D S ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum et 4 D S.

*Corol. 3.* Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, et ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibat.

*Corol. 4.* Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, et ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

*Scholium.*

Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodecunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; et requiratur lex vis centripetæ: ducatur C G radio R P parallela, et orbis tangenti P G occurrens in G; et (<sup>e</sup>) vis illa (per Corol. 1. et Schol.



Prop. X. et Corol. 3. Prop. VII.) erit ut  $\frac{C G \text{ cub.}}{R P \text{ quad.}}$

(<sup>e</sup>) 290. Vis ad centrum vel a centro C, tendens est ut C P, (per Corol. 1. Prop. X. et Not. 232.) adeoque exponatur per lineam C P; vis ad punctum R, tendens exponatur

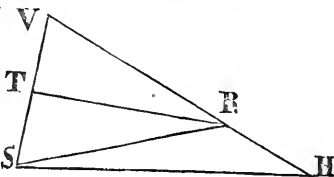
per lineam A, et (per Corol. 3. Prop. VII.) erit  $C P \times R P^2 : C G^3 = C P : A = \frac{C G^3}{R P^2}$

## SECTIO IV.

*De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum et hyperbolicorum ex umbilico dato.*

## LEMMA XV.

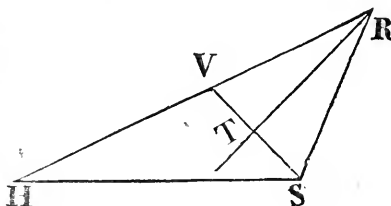
*Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ S V, H V, quarum una H V æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera S V a perpendicularo T R in se demisso bisecetur in T; perpendicularum illud T R sectionem conicam alicubi tanget: et contra, si tangit, erit H V æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendicularum T R rectam H V productam, si opus fuerit, in R; et jungatur S R. Ob æquales T S, T V, æquales erunt et rectæ S R, V R et anguli T R S, T R V. (\*) Unde punctum R erit ad sectionem conicam, et perpendicularum T R tanget eandem et contra. Q. e. d.

(\*) \* Si fuerint S, et H, Ellipseos umbilici, erit  $SR + RH = HV =$  axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipsis quam T R tangit in R, ob angulos T R S, T R V, æquales (per Prop. 52. et 46. Lib. 3. Conic. Apollon. Theor. III. et IV. de El.) et contra si T R tangat Ellipsim in R, et ducatur S V, ad T R perpendicularis, erit ob angulos T R S, T R V, æquales  $VR = SR$ , et  $VH = SR + RH =$  axi majori.

\* Si fuerint S, et H, Hyperbolæ umbilici ob æquales T S, T V, erit  $SR = VR$ , et  $HR - SR = HV$  æqualis axi majori, et R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta T R ob angulos V R T, T R S, æquales (per Prop. 51. et 46. Lib. 3. Conic. Apoll. Theor. III. et IV. de Hyperb.) et contra si T R tangat Hyperbolam in R, et agatur S V ad T R perpendicularis erit  $VR = SR$ , et  $HV = HR - RS$ , æqualis axi majori, ut patet.













k S; et composite ut  $V K + V k$  ad  $K S + k S$ ; divisimque ut  $V k - V K$  ad  $k S - K S$ , id est, <sup>(m)</sup> ut  $2 V X$  ad  $2 K X$  et  $2 K X$  ad  $2 S X$ , ideoque ut  $V X$  ad  $H X$  et  $H X$  ad  $S X$ , similia erunt triangula  $V X H$ ,  $H X S$ , et propterea  $V H$  erit ad  $S H$  ut  $V X$  ad  $X H$ , ideoque ut  $V K$  ad  $K S$ . Habet igitur trajectorye descriptae axis principalis  $V H$  eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam  $S H$ , quam habet trajectorye describendae axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, et propterea ejusdem est speciei. Insuper cum  $V H$ ,  $v H$  æquentur axi principali, et

$+ S c^2 =$  (sive  $c A^2$  per nat. focorum):  $S c^2$  et  $S K : G K = c A : S c$  et duplicando terminos posterioris rationis est  $S K : G K = A a : S H$ .

Si  $G K$  sit major quam  $c E$  erit  $G S^2 : G K^2$  in minori ratione quam  $c E^2$  ad  $S c^2$ , et componendo erit  $G S^2 + G K^2$ , sive  $S K^2$  ad  $G K^2$  in minori ratione quam  $c E^2 + S c^2$  ad  $S c^2$  unde tandem deducetur in hoc casu esse  $S K$  ad  $G K$  in minori ratione quam  $A a$  ad  $S H$ .

Et pariter si  $G K$  sit minor quam  $c E$ , erit  $S K$  ad  $G K$  in majori ratione quam  $A a$  ad  $S H$ .

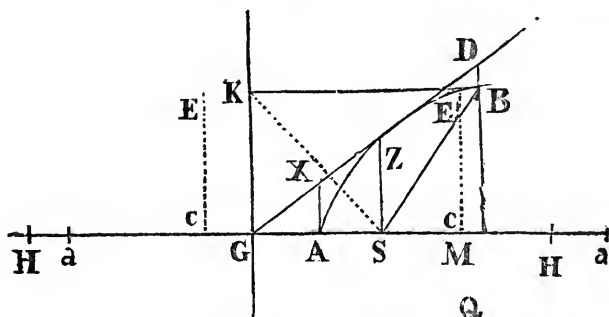
Sed (per princ. trigo.) est in triang.  $S K G$ , sinus totalis ad sinum ang.  $K S G$  (sive ad sinum anguli  $S K B$  huic æqualem ob Parallelas  $G S$ ,  $K B$ ) sicut  $K S$  ad  $K G$ . Ergo ratio

ret sinu  $K S B$  quod quidem est absurdum, nulla ergo duci poterit linea  $S B$  quae determinet punctum  $B$  tale ut sit  $K B$  ad  $S B$  sicut  $A a$  ad  $S H$ , sicut etiam in eo casu linea  $K B$  nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique si  $G K$  sit minor  $c E$ , est sin. tot. ad sin.  $S K B$  in majori ratione quam sinus  $K S B$  ad sin.  $S K B$ , dabitur ergo sinus  $K S B$ , sed ut ad acutum vel obtusum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ  $S B$  (sed non plures) quæ requisitam cum  $K B$  habeant rationem, ut etiam linea  $K B$  hoc in casu duobus in punctis Ellipsim secat.

Ergo si  $K B : B S = G A : A S = A a : S H$  punctum  $B$  est in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam secundum New-



sinus totalis ad sin. Ang.  $S K B$ , æqualis est rationi  $A a$  ad  $S H$ , si  $G K$  sit æqualis  $c E$ , est illâ minor si  $G K$  superet  $c E$ , est illâ major si  $G K$  minor sit quam  $c E$ .

Ut verò lineæ  $K B$ ,  $B S$  habeant rationem  $A a$  ad  $S H$ , oportet ut in Triang.  $K B S$ , sinusangulorum  $K S B$ ,  $S K B$  sint in eâ ratione  $A a$  ad  $S H$ ; ergo si  $G K$  sit æqualis  $c E$ , est sinus totalis: Sin.  $S K B =$  Sin.  $K S B$ . Sin.  $S K B$ , ideoque in hoc casu crit Sin. tot. = Sin.  $K S B$ , hoc est, linea  $S B$  erit perpendicularis in  $S K$ , unica ergo erit, unicunque punctum  $B$ , sicut etiam linea  $K B$  in unico puncto Sectioni Conicæ occurrit.

Si  $G K$  sit major  $c E$  est sin. totalis ad sin.  $S K B$  in minori ratione quam sin.  $K S B$  ad sin.  $S K B$ , unde sinus totalis minor esse debe-

tionianam solutionem descriptam transire per puncta  $B$  et  $C$  omnia enim planè conveniunt ad Lemmatiss (293) Hypothesim.

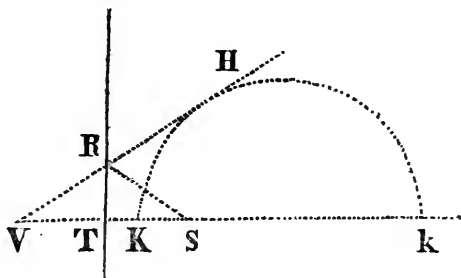
In iis omnibus parabolum usurpamus pro ellipsi in quâ distantia focorum infinita est, ac proximè axi majori æqualis.

<sup>(m)</sup> \* Id est, ut  $2 V X$  ad  $2 K X$ , et  $2 K X$  ad  $2 S X$ ; nam  $K X = k X = H X$  (per constr.) adeoque  $V K + V k = 2 V K + 2 K X = 2 V X$ , et  $K S + k S = K k = V k - V K = 2 K X$ ; et quia  $k S = k X + S X = K X + S X = K S + 2 S X$ , erit  $k S - K S = 2 S X$ , adeoque  $V K : K S = V X : H X = H X : S X$ . Quare similia erunt triangula  $V X H$ ,  $H X S$ , quorum latera  $V X$  et  $X H$ ,  $H X$  et  $K S$ , proportionalia communem angulum  $X$ , complectuntur.

V S, v S a rectis T R, t r perpendiculariter bisecentur, liquet (ex Lem. XV.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. Q. e. f. (°)

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit trajectoria quæ rectam T R tanget in puncto dato R. In rectam T R, demitte perpendicularem S T, et produc eandem ad V, ut sit T V æqualis S T. Junge V R et rectam V S infinite productam seca in K et k, ita ut sit V K ad S K et V k ad S k ut ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum;

circuloque super diametro K k descripto secetur producta recta V R in H, et umbilicis S, H, axe principali rectam V H æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque V H esse ad S H ut V K ad S K atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ



ad distantiam umbilicorum ejus, (°) patet ex demonstratis in casu secundo, et propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam vero T R quâ angulus V R S bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. e. f.

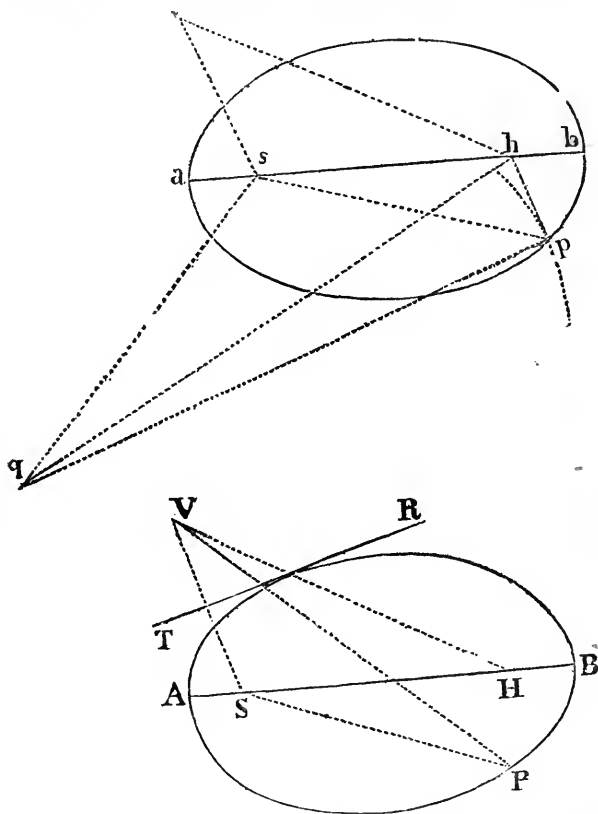
Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit trajectoria A P B, quæ tangat rectam T R, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ a p b, axe principali a b et umbilicis s, h descriptæ. In tangentem T R demitte perpendicularum S T, et produc idem ad V, ut sit T V æqualis S T. Angulis autem S V P, S P V fac angulos h q s, s h q æquales; centroque q et intervallo quod sit ad a b ut S P ad V S describe circulum secantem figuram a p b in p. Junge s p et age S H quæ sit ad s h ut est S P ad s p, quæque angulum P S H angulo p s h et angulum V S H angulo p s q æquales constituat. Denique umbilicis S, H, et axe principali A B distantiam V H æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur s v quæ sit ad s p ut est s h ad s q, quæque constituat angulum v s p angulo h s q et angulum v s h angulo p s q æquales, trianguia s v h, s p q erunt similia, et propterea v h

(°) \* Si describenda sit hyperbola, in S V, versùs V productâ, ita sumantur puncta K, k, ut inter utrumque positum sit V, cæteraque fiant ut NEWTONUS præscribit, et quoniam  $VK : KS = V k : k S$ , erit  $Vk - VK : k S - KS = VK : k S = VK + V k : KS + k S$ , sed  $Vk - VK = 2 V X$ ,  $k S - KS = 2 K X$ ,  $VK + V k = 2 K X$ , et  $KS + k S =$

$2 S X$ . Reliqua demonstratio eadem est ac pro ellipsi.

(°) \* Centro circuli litterâ X, notato, jungantur H X, H S, H V, et eadem est demonstratio quæ casus 2<sup>1</sup> pro ellipsi, et si producatur R V, S V, versùs V, ut punctum V, situm sit inter K et k, eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

erit ad  $p q$  ut est  $s h$  ad  $s q$ , id est (ob similia triangula  $V S P$ ,  $h s q$ ) ut est  $V S$  ad  $S P$  seu  $a b$  ad  $p q$ . Æquantur ergo  $v h$  et  $a b$ . Porro (<sup>p</sup>) ob similia triangula  $V S H$ ,  $v s h$ , est  $V H$  ad  $S H$  ut  $v h$  ad  $s h$ , id est,



axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis  $a b$  ad umbilicorum intervallum  $s h$ ; et propterea figura jam descripta similis est figuræ  $a p h$ . Transit autem hæc figura per punctum  $P$ , (<sup>q</sup>) eo quod triangulum  $P S H$  simile sit triangulo  $p s h$ ; et quia  $V H$  æquatur ipsius axi et  $V S$  bisecatur perpendiculariter a recta  $T R$ , tangit eadem rectam  $T R$ . (<sup>r</sup>) Q. e. f.

• (<sup>p</sup>) Similia sunt triangula  $V S H$ ,  $v s h$ , nam (per constr.) angulus  $V S P = h s q = v s p$ , et angulus  $H S P = h s p$ , adeoque angulus  $V S H = v s h$ ; et præterea  $s p : s h = S P : S H$ , et  $s v : s p = s h : s q = S V : S P$ , ob similia triangula  $V S P$ ,  $h s q$ ; quare ex æquo  $s v : s h = S V : S H$ , triangula igitur  $V S H$ ,  $v s h$ , quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

• (<sup>q</sup>) Nam si ducatur recta  $S P$ , perimetro

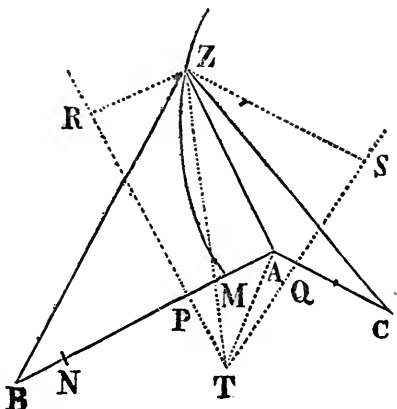
figuræ occurrens in  $P$ , et angulum  $P S H$ , æqualem faciens angulo  $p s h$ , patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo  $P S H$ ,  $p s h$ , fore similia; unde vicissim manifestum est punctum  $P$ , esse in perimetro figuræ, si triangulum  $P S H$ , simile sit triangulo  $p s h$ .

• (<sup>r</sup>) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci  $H$ ,  $h$ , et vertices  $B$ ,  $b$ , ad contrariam partem transferantur.

## LEMMA XVI.

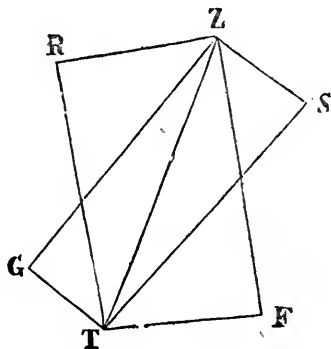
*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.*

*Cas. 1.* Sunto puncta illa data A, B, C et punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum A Z, B Z, locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici sunt A et B, et principalis axis differentia illa data. Sit axis ille M N. Cape P M ad M A ut est M N ad A B, et erecta P R perpendiculari ad A B, demissaque Z R perpendiculari ad P R; erit, (\*) ex naturâ hujus hyperbolæ, Z R ad A Z ut est M N ad A B. Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C et principalis axis differentia inter A Z et C Z, ducique potest Q S ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis Z S, hæc fuerit ad A Z ut est differentia inter A Z et C Z ad A C. Dantur ergo rationes ipsarum Z R et Z S ad A Z, et idcirco datur earundem Z R et Z S ratio ad invicem; ideoque si rectæ R P, S Q concurrant in T, et agantur T Z et T A, figura T R Z S dabitur specie, et recta T Z in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta T A, ut et angulus A T Z; et ob datas rationes ipsarum A Z ac (†) T Z ad Z S dabitur earundem ratio ad invicem; et inde dabitur triangulum A T Z, cujus vertex est punctum Z. Q. e. i.



\* (\*) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ Z R, ad A Z, ut est M N, ad A B, (298).

(†) 500. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, et T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parallelæ et se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendicularia Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis T G, T F æqualia adeoque in datâ ratione.



*Cas. 2.* Si duæ ex tribus lineis, puta  $AZ$  et  $BZ$ , æquantur, ita age rectam  $TZ$ , ut bisecet rectam  $AB$ ; dein quære triangulum  $ATZ$  ut supra.

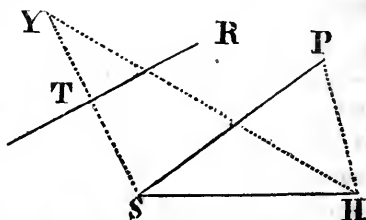
*Cas. 3.* Si omnes tres æquantur, locabitur punctum  $Z$  in centro circuli per puncta  $A, B, C$  transeuntis. Q. e. i.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apolonii* a *Vieta* restitutum.

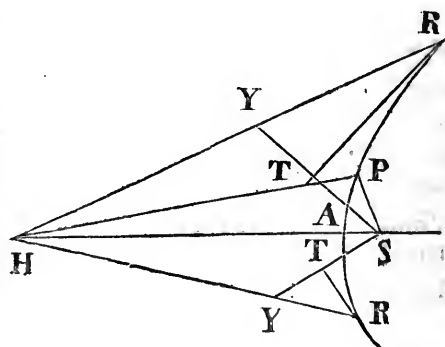
### PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

*Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget.*

Detur umbilicus  $S$ , punctum  $P$ , et tangens  $TR$ , et inveniendus sit umbilicus alter  $H$ . Ad tangentem demitte perpendicularum  $ST$ , et produc idem ad  $Y$ , ut sit  $TY$  æqualis  $ST$ , et erit  $YH$  æqualis axi principali. Junge  $SP$ ,  $HP$ , et erit  $SP$  differentia inter  $HP$  et axem principalem. <sup>(n)</sup> Hoc modo si dentur plures tangentes  $TR$ , vel plura puncta  $P$ , devenietur semper ad lineas totidem  $YH$ , vel  $PH$ , a dictis punctis  $Y$  vel  $P$  ad umbilicum  $H$  ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus  $SP$  differunt ab iisdem, atque ideò quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; et inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter  $H$ . Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est  $YH$ ; vel, si trajectoria ellipsis est,  $PH + SP$ ; sin hyperbola,  $PH - SP$ ) habetur trajectoria. Q. e. i.



<sup>(n)</sup> 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut  $Y$ , ex quibus ad umbilicum  $H$ , inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut  $YH$ , quod fit per *Cas. 3.* Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes et punctum perimetri sectionis  $P$ , dabuntur duo puncta ut  $Y$ , ex quibus ad umbilicum  $H$ , inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, et 3<sup>um</sup> punctum  $P$ , ex quo ducenda  $PH$ , cujus differentia a lineâ  $YH$ , est data  $SP$ . Nam in ellipsi  $PH + SP = YH$ , adeoque  $YH - PH = SP$ ; in hyperbolâ  $PH - SP = YH$ , undè  $PH - YH = SP$ , estque *Casus 2<sup>us</sup> Lem. XVI.* Tandem si dentur tria perimetri puncta ut  $P$ , locum habet *Casus 1<sup>us</sup>* ejusdem Lemmatis.



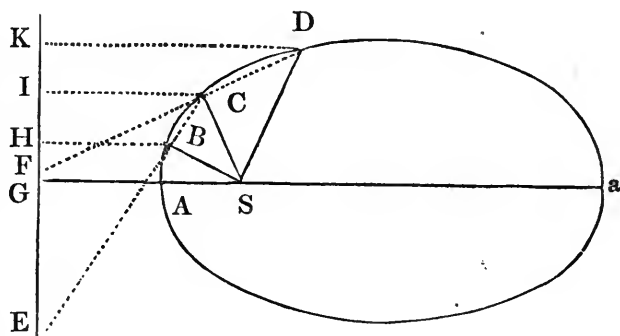


*Scholium.*

Ubi trajectory est hyperbola, sub nomine hujus trajectorye oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas B C, C D produc ad E, F, ut sit E B ad E C ut S B ad S C, et F C ad F D ut S C ad S D. Ad E F ductam et productam demitte normales S G, B H, inque G S infinite productâ cape G A ad A S et G a ad a S ut est H B ad B S; et erit A vertex, et A a axis principalis trajectorye: quæ, perinde ut G A major, æqualis, vel minor fuerit quam A S,

erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ G F cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio



cadente ad contrariam partem lineæ G F. Nam si demittantur ad G F perpendiculara C I, D K; erit I C ad H B ut E C ad E B, hoc est, ut S C ad S B; et vicissim I C ad S C ut H B ad S B sive ut G A ad S A. Et simili argumento probabitur esse K D ad S D in eâdem ratione. (\*) Jacent ergo puncta B, C, D in conic sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara a punctis iisdem ad rectam G F demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra de la Hire, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

(\*) \* Jacent ergo puncta B, C, D, in conic sectione (vide n. 298.)

## SECTIO V.

*Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.*

## LEMMA XVII.

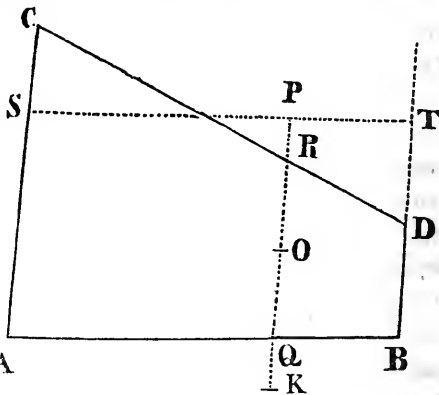
*Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P ad trapezii alicujus A B C D, in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta A B, C D, A C, D B totidem rectæ P Q, P R, P S, P T in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera  $PQ \times PR$ , erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita  $PS \times PT$  in datâ ratione.*

Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q et P R lateri A C, et P S ac P T lateri A B. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà A C et B D, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, et bisecabit etiam R Q. Sit O punctum in quo R Q bisecatur, et erit P O

ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P O ad K, ut sit O K æqualis P O, et erit O K ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P et K sint ad conicam sectionem, et P K secet A B in dato angulo, erit (per Prop. 17, 19, 21 et 23. Lib.

III. Conicorum Apollonii) rectangulum P Q K ad rectangulum

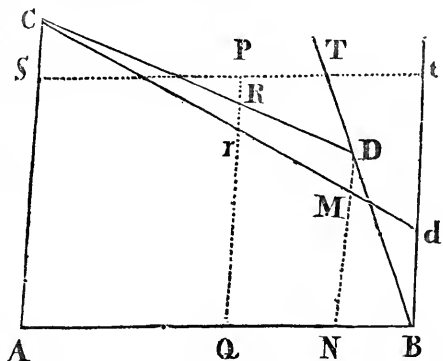
A Q B in datâ ratione. (y) Sed Q K et P R æquales sunt, utpote æqualium O K, O P. et O Q, O R differentiarum, et inde etiam rectangula P Q K et  $PQ \times PR$  æqualia sunt; atque ideo rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum A Q B, hoc est ad rectangulum  $PS \times PT$  in datâ ratione. Q. e. d.



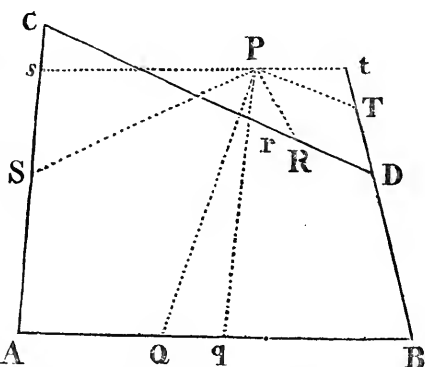
(y) Erit rectangulum P Q K ad rectangulum A Q B in datâ ratione. Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut P K secet aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut A B, rectangulum partium lineæ P K erit ad

rectangulum partium lineæ A B ut rectangulum partium lineæ cujusvis alius Parallele lineæ P K et ad sectionem terminatæ, ad rectangulum partium quas hæc nova linea secet in lineâ A B: ideo ubicumque sit punctum P rectangula P Q K et A Q B erunt in eadem datâ ratione.

*Cas. 2.* Ponamus jam trapezii latera opposita  $AC$  et  $BD$  non esse parallela. Age  $Bd$  parallelam  $AC$  et occurrentem tum rectae  $ST$  in  $t$ , tum conicæ sectioni in  $d$ . Junge  $Cd$  secantem  $PQ$  in  $r$ , et ipsi  $PQ$  parallelam age  $DM$  secantem  $Cd$  in  $M$  et  $AB$  in  $N$ . Jam ob similia triangula  $BTt$ ,  $DBN$ ; est  $Bt$  seu  $PQ$  ad  $Tt$  ut  $DN$  ad  $NB$ . Sic et  $(*) Rr$  est ad  $AQ$  seu  $PS$  ut  $DM$  ad  $AN$ . Ergo ducendo antecedentes in antecedentes et consequentes in consequentes, ut rectangulum  $PQ$  in  $Rr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Tt$ , ita rectangulum  $NDM$  est ad rectangulum  $ANB$ , et (per *Cas. 1.*) ita rectangulum  $PQ$  in  $Pr$  est ad rectangulum  $PS$  in  $Pt$ ,  $(†)$  ac divisim ita rectangulum  $PQ \times PR$  est ad rectangulum  $PS \times PT$ . Q. e. d.



*Cas. 3.* Ponamus denique lineas quatuor  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ ,  $PT$  non esse parallelas lateribus  $AC$ ,  $AB$ , sed ad ea utcumque inclinatas. Earum vice age  $Pq$ ,  $Pr$  parallelas ipsi  $AC$ ; et  $Ps$ ,  $Pt$  parallelas ipsi  $AB$ ; et propter datos angulos triangulorum  $PQq$ ,  $PRr$ ,  $PSs$ ,  $PTt$ , dabuntur rationes  $PQ$  ad  $Pq$ ,  $PR$  ad  $Pr$ ,  $PS$  ad  $Ps$ ,  $PT$  ad  $Pt$ ; atque ideo rationes compositæ  $PQ \times PR$  ad  $Pq \times Pr$ , et  $PS \times PT$  ad  $Ps \times Pt$ . Sed, per superius demonstrata, ratio  $Pq \times Pr$  ad  $Ps \times Pt$  data est: ergo et ratio  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ . Q. e. d.



$(*)$  \*  $Rr : AQ$  seu  $PS = DM : AN$ . Sunt enim propter parallelas  $Rr$ ,  $DM$ , triangula  $rCR$ ,  $MCD$  similia, ideoque  $Rr : DM = Cr : CM$ ; sed est  $Cr : CM = AQ : AN$ ; ergo  $Rr : DM = AQ$  vel  $PS : AN$  et  $Rr : PS = DM : AN$ .

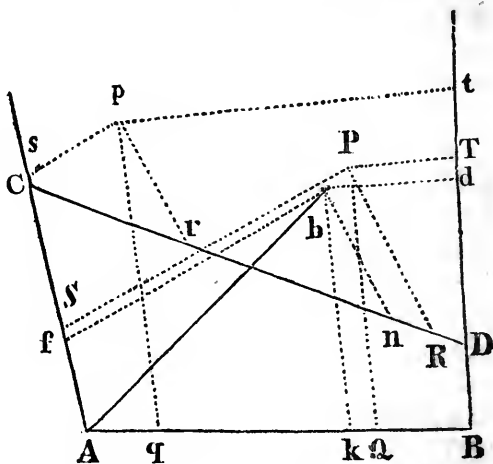
$(†)$  \* *Ac divisim.* Ex demonstratis  $NDM$ :

$ANB = PQ \times Rr : PS \times Tt = PQ \times Pr : PS \times Pt$ , et divisim  $NDM : ANB = PQ \times Pr : PS \times Pt$  —  $PQ \times Rr : PS \times Pt$  —  $PS \times Tt = PQ \times PR : PS \times PT$ , sed ratio  $NDM$  ad  $ANB$  data est, ergo et ratio  $PQ \times PR$  ad  $PS \times PT$ .

## LEMMA XVIII.

*Isdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii PQ  
 $\times$  P R sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera PS  $\times$  P T in  
 datâ ratione ; punctum P, a quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem  
 circa trapezium descriptam.*

Per puncta A, B, C, D et aliquod infinitorum punctorum P, putà p, concipe conicam sectionem describi : dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge A P secantem hanc conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, putà in b. Ergo si ab his punctis p et b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ p q, p r, p s, p t et b k, b n, b f, b d ; erit ut  $b k \times b n$  ad  $b f \times b d$  ita (per Lem. XVII.)  $p q \times p r$  ad  $p s \times p t$ , et ita (per hypoth.)  $P Q \times P R$  ad  $P S \times P T$ . Est et propter similitudinem trapeziorum b k A f, P Q A S, ut b k ad b f ita P Q ad P S. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit b n ad b d ut P R ad P T. (†) Ergo trapezia æquiangula D n b d, D R P T similia sunt, et (a) eorum diagonales D b, D P propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum A P, D P ideòque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. Q. e. d. (b)



(†) \* Cum sit  $b k \times b n : b f \times b d =$   
 $P Q \times P R : P S \times P T$

item  $b f : b k = P S : P Q$

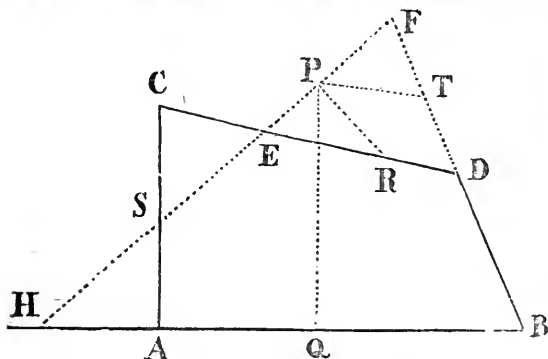
erit  $b n : b d = P R : P T$

*Corol.* Hinc si rectæ tres  $PQ, PR, PS$ , a puncto communi  $P$  ad alias totidem positione datas rectas  $AB, CD$ , singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis  $(^c) PQ \times PR$  ad quadratum tertiæ  $PS$  in datâ ratione: punctum  $P$ , a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ quæ tangit lineas  $AB, CD$  in  $A$  et  $C$ ; et contra. Nam coeat linea  $BD$  cum lineâ  $AC$ , manente positione trium  $AB, CD, AC$ ; dein coeat etiam linea  $PT$  cum linea  $PS$ : et rectangulum  $PS \times PT$  evadet  $PS$  quad. rectæque  $AB, CD$ , quæ

singulis trapezii lateribus occurrat in  $F, E, S, H$ , ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibussingula triangula  $FPT, FED, P ER, E CS, S HA, PH Q$ , clauduntur.

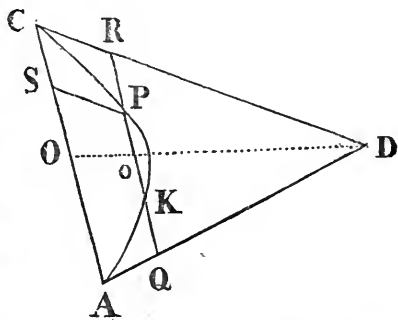
punctum  $P$ , cadit in  $C$ , si ponatur  $CE = CD$ , invenietur quoque valor unus  $PE = o$ , ac proinde punctum  $P$ , cum puncto  $D$ , coincidit; idem pari argumento respectu punctorum  $A, B$ , reperitur, si ponatur  $AQ = o$  vel  $AQ = AB$ .

$(^c)$  Hinc si rectæ tres, &c. Sint tres lineæ  $AB, CD, AC$  positione datæ, et lineæ  $AB, CD$  tangent sectionem conicam in  $A$  et  $C$ , et a puncto communi  $P$  ducantur tres rectæ  $PQ, PR, PS$  in datis angulis ad singulas  $AB, CD, AC$  erit  $PQ \times PR$  in ratione datâ ad quadratum tertiæ  $PS$ : Sit enim  $PS$  parallela lineæ  $DC$ , et sint  $RP, PQ$  parallelæ lineæ  $CA$  sitque  $PK$  chorda sectionis, sumatur medium  $O$  chordæ  $AC$  ducaturque



Assumptis igitur  $CE$ , tanquam abscissâ et  $PE$  tanquam ordinatâ loci punctorum  $P$ , data erit ratio  $PE$ , ad  $PR$ , adeoque  $PE$ , in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi  $PR$ ; ob datam  $CD$ , invenietur  $ED$ , ut potè æqualis  $CD - CE$ , et per triangulum  $FED$  specie datum invenietur  $EF$ , ac proinde  $PF = EF - EP$ , et inde per triangulum  $FPT$ , invenietur  $PT$ , omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas  $CE, PE$ , unius dimensionis, et alias datas quantitates. Similiter  $ES$  et  $CS$  et  $SA = CA - CS$ , atquè  $HS$ , per triangulum  $SAH$ , specie datum, et hinc  $PH = HS + SE + EP$ , adeoque  $PQ$ , per triangulum  $PHQ$ , invenientur in lineis  $CE$  et  $PE$ , unius dimensionis et aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis  $PQ \times PR, PS \times PT$ , rectæ variabiles  $CE, PE$ , non plures quam duas dimensiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cùm igitur, ut vulgò notum est, æquationis quadraticæ locus sit sectio conica, patet locum punctorum  $P$ , esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta  $C, D, P, A$ , transeat inito calculo facilè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur  $CE = o$  invenietur valor unus ipsius  $PE = o$ , adeoque

per punctum  $D, D O$ , quæ secabit tam chordam  $PK$  quam totam  $RQ$  in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit  $RK = PQ$ ,



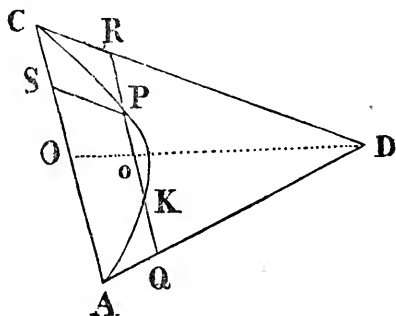
sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.)  $CR^2$  ad  $RP \times RK$  in datâ ratione, ideoque est  $CR^2$  ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione, sed ob parallelas  $CR, SP$  et  $CS, RP$  est  $PS = CR$ , ergo  $PS^2$  est ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione.

curvam in punctis A et B, C et D secabant, jam (+) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

*Scholium.*

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A et D vel C et B junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis, et lineæ quatuor P Q, P R, P S, P T ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis P Q  $\times$  P R æquale rectangulo sub duabus aliis P S  $\times$  P T, sectio conica evadet circulus. (e) Idem fiet,

Si lineæ P S, R P, P Q in aliis sed datis angulis ad lineas A C, C D, A D inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde

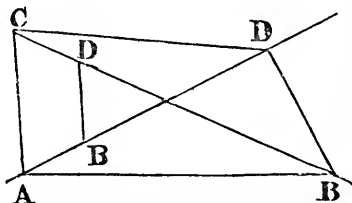


deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore  $SP^2$  ad  $RP \times PQ$  in datâ ratione.

Pariter et conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

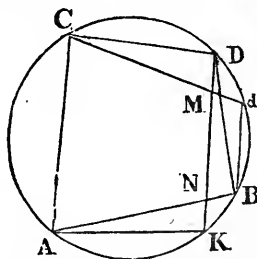
(+) \* Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent; puncta enim A et B, C et D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quare evanescentibus distantis AB et CD, lineæ AB et CD, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A et C. Vid. Lem. VI. Newt.

(d) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, et quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum P,



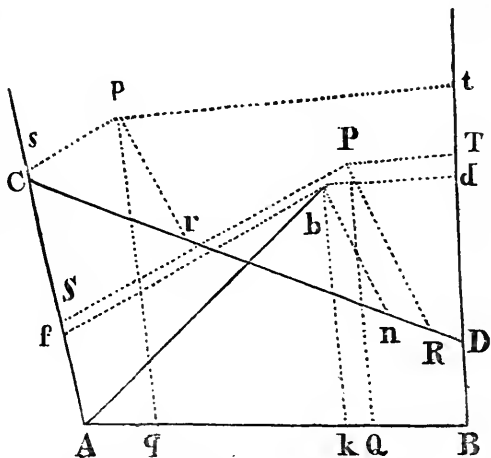
incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur et conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.

(e) 304. Sectio conica evadet circulus. Si ex trapezii ABCD circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta DN, lateri AC parallela, et lateri AB occurrens in N, deinde ex



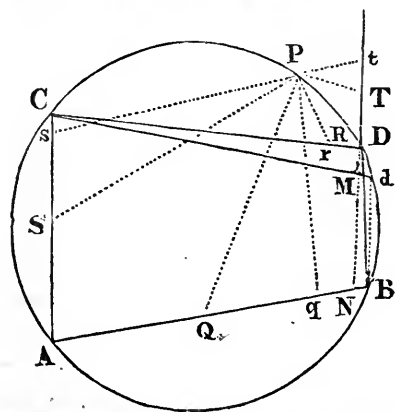
altero angulo B, ducatur Bd, lateri AC parallela circulo occurrens in d, jungaturque Cd rectam DN, secans in M, erit  $DN \times DM = AN \times NB$ . Nam jungatur AK, et quoniam arcus CD, et AK, Dd, et KB, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli Dcd, et BAK, CDK et AKD, iis arcibus insistentes et æqualem

si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, et rectangulum sub duabus ductis  $PQ \times PR$  sit ad rectangulum sub aliis duabus  $PS \times PT$  ut rectangulum sub sinibus angulorum  $S, T$ , in quibus duæ ultimæ  $PS, PT$  ducuntur, ad rectangulum sub sinibus angulorum  $Q, R$ , in quibus duæ primæ  $PQ, PR$ , ducuntur. (<sup>f</sup>) Cæteris in casibus locus puncti  $P$  erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (<sup>g</sup>) Vice autem trapezii  $ABCD$  substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed et è punctis quatuor  $A, B, C, D$  possunt unum vel duo abire ad infi-



arcum chordæ  $CD, AK$ , æquantur; quare triangula  $AKN, CDM$ , similia et æqualia sunt; est igitur  $DM = NK$ ; sed ex naturâ circuli  $AN \times NB = KN \times DN$ , ergò  $AN \times NB = DM \times DN$ .

305. Si ergo sectio conica trapezium circum-



scripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi conî fiat parallelum, erit rectangulum  $PQ \times PR$  ad rectangulum  $PS \times PT$ , ut rectangulum sub sinibus angulorum  $S, T$ , ad rectangulum sub sinibus angulorum  $Q, R$ . — Dem. factâ constructione Cas. 3<sup>i</sup>. Lem. XVII. ægantur rectæ  $DN, B, d$ , lateri  $AC$  parallelæ,

ut in articulo superiori; et erit per demonstrationem casus 2<sup>i</sup>. Lem. XVII.  $ND \times DM : AN \times NB = PQ \times PR : PS \times PT$ , hoc est (304)  $PQ \times PR = PS \times PT$ . Jam verò angulorum sinibus litterâ  $S$  designatis crit  $S. PQA = S. CAB$ , et  $S. PRC = S. ACD$ , ob parallelas  $Pq, AC$ , et  $S. PsS = S. PSC = S. CAB$ , et  $S. P t T = S. ABD$ , ob parallelas  $s t, AB$ , et ob angulum  $ACD$ , complementum anguli  $ABD$  ad duos rectos,  $S. P t T = S. ACD$ .

Porrò

$PQ : Pq = S. PQA (S. CAB) : S. PQB$   
 $Ps : PS = S. PSC : S. P s S (S. CAB).$   
 $PR : Pr = S. PRC (S. ACD) : S. PRC.$   
 $Pt : PT = S. P t T : S. P t T (S. ACD).$   
 Ergò per compositionem rationum  
 $PQ \times PR \times Ps \times Pt : PS \times PT \times Pq \times Pr = PQ \times PR : PS \times PT$   
 $= S. PSC \times S. P t T : S. PQB \times S. PRC. Q. e. d.$

306. Corol. Eadem manente proportionem, si omnes anguli ad  $S, T, Q, R$ , fuerint æquales, rectangulum  $PQ \times PR$ , erit quoque æquale rectangulo  $PS \times PT$ .

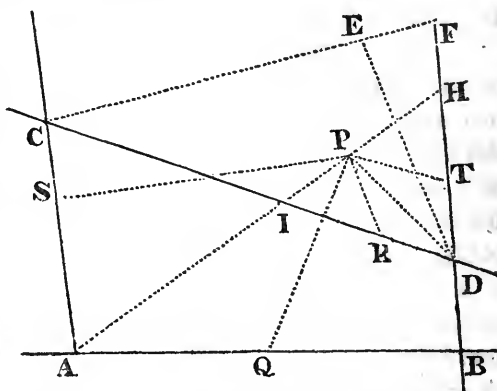
(<sup>f</sup>) \* Nam vel punctum  $P$ , locabitur in sectione rectilineâ per verticem conî transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(<sup>g</sup>) 307. Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum  $ABDC$ , cujus latera duo  $AB, CD$ , se mutuo instar diagonalium decussant; huic enim quadrilatero absque mu-

nitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, et in plagas parallelarum abibit in infinitum.

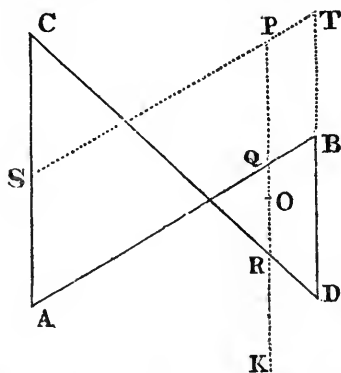
LEMMA XIX.

*Invenire punctum P, a quo  
si rectæ quatuor PQ, PR,  
PS, PT ad alias toti-  
dem positione datas rectas  
AB, CD, AC, BD,  
singulæ ad singulas, in da-  
tis angulis ducantur, rec-  
tangulum sub duabus duc-  
tis,  $PQ \times PR$ , sit ad  
rectangulum sub aliis dua-  
bus,  $PS \times PT$ , in datâ  
ratione.*



Lineæ A B, C D, ad quas rectæ duæ P Q, P R unum rectangulo-  
rum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis  
lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quam-  
libet A H, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas  
B D, C D, nimirum B D in H et C D in I, et ob datos omnes angulos  
figuræ, dabuntur rationes P Q ad P A et P A ad P S, ideoque ratio P Q  
ad P S. Auferendo hanc a datâ ratione P Q  $\times$  P R ad P S  $\times$  P T, da-  
bitur ratio P R ad P T, et addendo datas rationes P I ad P R, et P T ad  
P H dabitur ratio P I ad P H, atque ideo punctum P. Q. e. i.

*Corol. 1.* Hinc <sup>(h)</sup> etiam ad loci punctorum infinitorum P punctum



demonstrationes Lemmatum XVII. et XVIII. Exemplum sit Cas. 1. Lem. XVII. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta P Q et P R, lateri A C et P S, ac P T, lateri A B; sinque insuper latera duo ex oppositis puta A C et B D, sibi invicem parallela et recta quæ bisecat, &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum C A B D.

(<sup>b</sup>) 308. Minima sit punctorum P, D, distantia P D, agantur D s, D q, ad A C, A B, in angulis datis P S C, P Q A, et juncatā, AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Y r, lateri C D, parallela, et Y t, ad D B, in angulo dato P T H; tum ex puncto D, ad Y r, ducatur D r, in angulo dato P R I; punctis P, D, coëuntibus erit P Q: P A = D q: D A, et P A: P S = D A: D s, adeoque P Q: P S = D q: D s, et

tatione aptari possunt tam constructiones quam





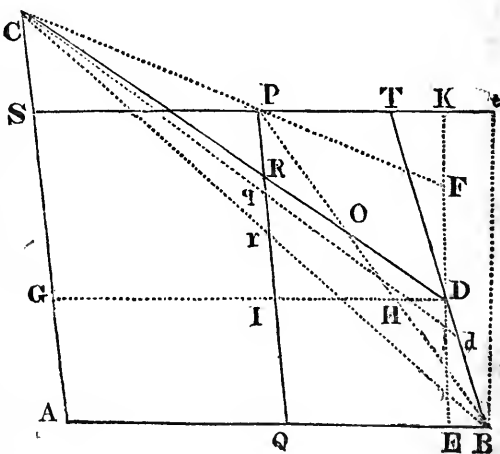
currit loco, lineâ A H existente infinitâ, locus erit parabola, et latus rectum ejus ad diametrum A G pertinens erit  $\frac{B G q}{A G}$ . Sin ea alicubi occurrat, locus hyperbola erit, ubi puncta A et H sita sunt ad easdem partes ipsius G: et ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus A G B rectus sit, et insuper B G quad. æquale rectangulo A G H, quo in casu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab Euclide incepti et ab Apollonio continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. <sup>(1)</sup>

### LEMMA XX.

*Si parallelogrammum quodvis A S P Q angulis duobus oppositis A et P tangit sectionem quamvis conicam in punctis A et P; et lateribus unius angulorum illorum infinitè productis A Q, A S occurrit eidem sectioni conicæ in B et C; a punctis autem occursum B et C ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum D agantur rectæ duæ B D, C D occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus P S, P Q in T et R: erunt semper abscissæ laterum partes P R et P T ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum D tanget sectionem conicam per puncta quatuor A, B, C, P transcurrentem.*

Cas. 1. Jungantur B P, C P et a puncto D agantur rectæ duæ D G, D E, quarum prior D G ipsi A B parallela sit et occurrat P B, P Q, C A in H, I, G; altera D E parallela sit ipsi A C et occurrat P C, P S, A B in F, K, E: et erit (per Lem. XVII.) rectangulum D E × D F ad rectangulum D G × D H in ratione datâ. Sed est P Q ad D E (seu I Q) ut P B ad H B,



bola. Porro datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per Prop. 52. 53. 54. 55.

Lib. 1. Conic. Apoll. sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

<sup>(1)</sup> \* Hoc veterum problema primus in suâ

ideoque ut  $P T$  ad  $D H$ ; et vicissim  $P Q$  ad  $P T$  ut  $D E$  ad  $D H$ . Est et  $P R$  ad  $D F$  ut  $R C$  ad  $D C$ , ideoque ut  $(I G \text{ vel }) P S$  ad  $D G$ , et vicissim  $P R$  ad  $P S$  ut  $D F$  ad  $D G$ ; et conjunctis rationibus fit rectangulum  $P Q \times P R$  ad rectangulum  $P S \times P T$  ut rectangulum  $D E \times D F$  ad rectangulum  $D G \times D H$ , atque ideo in datâ ratione. Sed dantur  $P Q$  et  $P S$ , et propterea ratio  $P R$  ad  $P T$  datur. Q. e. d.

*Cas. 2.* Quod si  $P R$  et  $P T$  ponantur in datâ ratione ad invicem, <sup>(m)</sup> tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum  $D E \times D F$  ad rectangulum  $D G \times D H$  in ratione datâ, ideoque punctum  $D$  (per Lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta  $A, B, C, P$ . Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si agatur  $B C$  secans  $P Q$  in  $r$ , et in  $P T$  capiatur  $P t$  in ratione ad  $P r$  quam habet  $P T$  ad  $P R$ : erit  $B t$  tangens conicæ sectionis ad punctum  $B$ . Nam concipe punctum  $D$  coire cum puncto  $B$ , ita ut chordâ  $B D$  evanescente,  $B T$  tangens evadat; et  $C D$  ac  $B T$  coincident cum  $C B$  et  $B t$ .

*Corol. 2.* Et vice versâ si  $B t$  sit tangens, et ad quodvis conicæ sectionis punctum  $D$  convenient  $B D, C D$ ; erit  $P R$  ad  $P T$  ut  $P r$  ad  $P t$ . Et contra, si sit  $P R$  ad  $P T$  ut  $P r$  ad  $P t$ : convenient,  $B D, C D$  ad conicæ sectionis punctum aliquod  $D$ .

*Corol. 3.* Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta,  $A, B, C, P, O$ ; easque secet recta  $B D$  in punctis  $D, d$ , et ipsam  $P Q$  secet recta  $C d$  in  $q$ . Ergo  $P R$  est ad  $P T$  ut  $P q$  ad  $P T$ ; <sup>(n)</sup> unde  $P R$  et  $P q$  sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

## LEMMA XXI.

*Si rectæ duæ mobiles et infinitæ  $B M, C M$  per data puncta  $B, C$  seu polos ductæ, concursu suo  $M$  describant tertiam positione datam rectam  $M N$ ; et alie duæ infinitæ rectæ  $B D, C D$ , cum prioribus duabus ad puncta illa*

Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

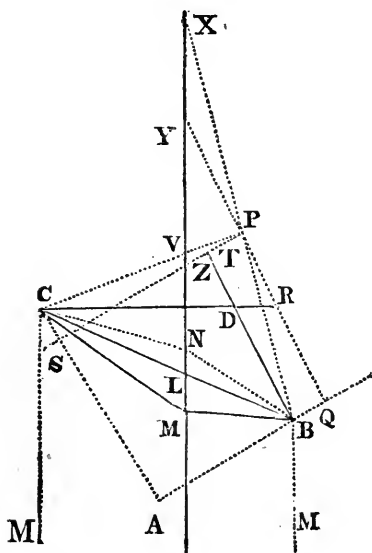
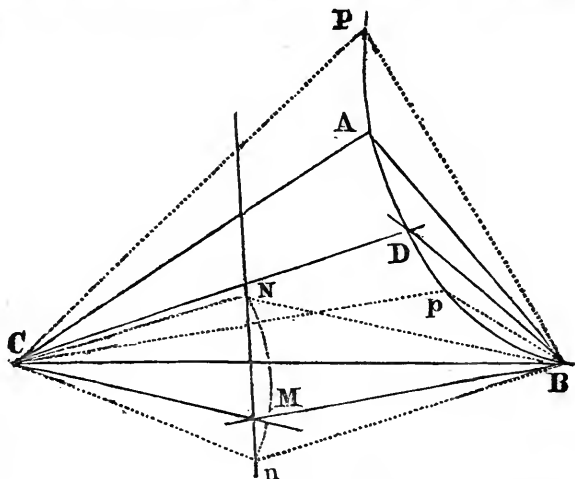
<sup>(m)</sup> \* Nam si  $P R$  et  $P T$  ponantur in ratione datâ, erit quoque ob datas  $P Q, P S$ , rectangulum  $P Q \times P R$ , ad rectangulum  $P S \times P T$ , in ratione datâ; sed per demonstrata in 1<sup>o</sup>. casu  $P Q \times P R : P S \times P T = D E \times D F : D H \times D G$ ; ergo  $D E \times D F$  ad  $D H \times D G$  in ratione datâ.

<sup>(n)</sup> \* Cum enim duæ sectiones conicæ se

mutuò intersecant in punctis  $O$  et  $B$ , (per hyp.) duci poterit recta  $B D$ , quæ duos sectionum arcus in  $B$  et  $O$  convenientes secet in punctis duobus, eritque per Coroll. 1. Lem. XX.  $P R : P T = P r : P t = P q : P T$ , adeoque  $P R : P T = P q : P T$ , unde  $P R$  et  $P q$  sibi invicem æquantur, ac proinde  $C d$ , coincidit cum  $C D$ , et punctum  $d$ , cum puncto  $D$ , (contra hyp.).



Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta B, C, A, et sit angulus D B M semper æqualis angulo dato A B C, et angulus D C M semper æqualis angulo dato A C B, et ubi punctum D incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat successivè in puncta duo immobilia n N : per eadem n, N, agatur recta n N, et hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D sectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P transeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed et ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P, transeuntem, (p) ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones



parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea P T parallela lineæ B A.

Eodem planè modo demonstrabitur lineam C A esse Parallelam lineæ P R. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P et A transiens, lineæ B D, C D juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam : Productis enim lineis P T, P R, donec secant lineas C A, B A, in S et Q fiet Parallelogrammum A S P Q, quod in Angulis suis oppositis A et P tangit sectionem conicam et lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B et C, et lineæ B D, C D a punctis occursum B et C ductæ (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) abscondunt a Parallelogrammi lateribus P S, P Q partes P T, P R quæ sunt ad invicem in datâ ratione (per demonstrationem Newtonianam hujusce) ergo (per 2. Casum Lem. XX.) punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

(p) \* Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam n N, &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, intersectio, locatur in sectione conicâ per polos C, B, transeunte; dum

conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M versari in lineâ curvâ absurdum est. Q. e. d. <sup>(9)</sup>

verò latera duo B n, et C n, B N, et C N, sese intersectant in n, N, aliorum laterum B p, et C p, B P et C P intersectiones p, P, sunt in eadem sectione conicâ ex demonstratis.

<sup>(9)</sup> 310. In hac organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circâ polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P suprà lineam C B divergant, infrâ eandem producta convergant.

Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli B C D, C B D, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1<sup>o</sup>. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circâ polum suum rotatur et crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili mariente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò intersecabunt; deinde si crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circâ polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò intersecabit.

In 2<sup>o</sup> casu anguli B C N, C B N circâ polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concursu, rectam N M L positione datam et aliorum crurum C B, B C seu C D, B D concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M et D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus M G, M H et ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; sit C E = x, D E = y, C B = a, ac proinde E B = a - x, M N = z, L N = b, L F = c, F N = d, C N = e, L K = f, N K = h, N B = g; et ob triângula N M G, N F L similia, N L (b) : L F (c) = M N (z) :

$$G M = \frac{c z}{b}, \text{ et } L N (b) : F N (d) = M N$$

$$(z) : G N = \frac{d z}{b}, \text{ adeoque } C G = C N - G N$$

$$= \frac{b e - d z}{b}; \text{ porro ob angulos æquales } D C E,$$

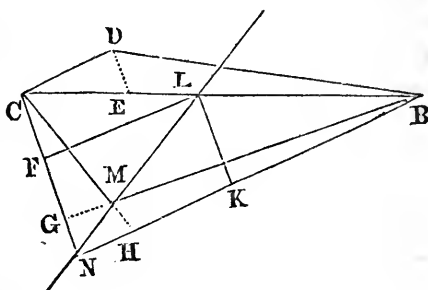
$$M C G, \text{ et } D E C, M G C, \text{ triângula } D C E, M C G \text{ similia sunt; quare } C G \left( \frac{b e - d z}{b} \right) :$$

$$G M \left( \frac{c z}{b} \right) = C E (x) : D E (y). \text{ Unde}$$

$$c z x = b e y - d z y, \text{ et } z = \frac{b e y}{c x + d y}; \text{ ob}$$

$$\text{triângula } N L K, N M H, \text{ similia } N L (b) : L K (f) = N M (z) : M H = \frac{f z}{b}, \text{ et } N L$$

$$(b) : N K (h) = M N (z) : N H = \frac{h z}{b}.$$



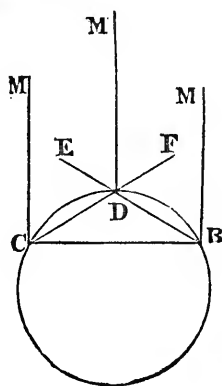
$$\text{undè } B H = \frac{g b - h z}{b}; \text{ ob similia triângula}$$

$$B E D, B H M, B H \left( \frac{g b - h z}{b} \right) : M H$$

$$\left( \frac{f z}{b} \right) = B E (a - x) : D E (y) \text{ quare } f a z$$

$$- f z x = g b y - h z y, \text{ et } z = \frac{g b y}{g b y - f x}$$

$$= \frac{f a + h y - f x}{c x + d y}, \text{ adeoque } g c x + g d y = f a e + h e y - f e x. \text{ Cum igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.}$$



311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M sibi invicem parallela maneant, seu, si recta N M ad distantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concursu suo D circum describent, et contrâ. Concurrent enim C M, D M, B M ad distantiam infinitam, et angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati sunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam an-



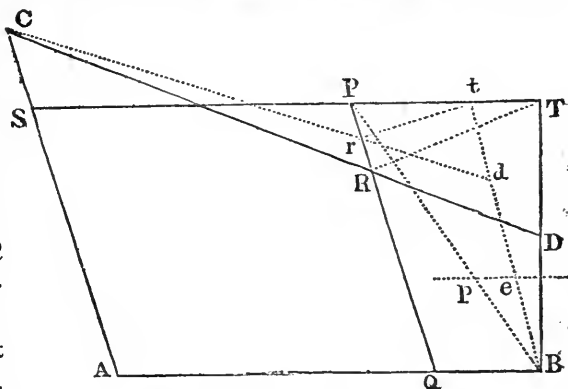




## PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

*Trajectoriam per data quinque puncta describere.*

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ poli nominentur, age rectas A B, A C, hisque parallelas T P S, Q R P per punctum quartum P. Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D, infinitas duas B D T, C R D, novissimè ductis T P S, P R Q (priorem priori et posteriorem posteriori) occurrentes in T et R. Denique de rectis P T, P R, actâ rectâ t r ipsi T R parallêlâ, abscinde quasvis P t, P r ipsis P T, P R porportionales; et si per earum terminos t, r et polos B, C actæ B t, C r concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsîtâ. Nam punctum illud d (per Lem. XX.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; et lineis R r, T t evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. e. d.

*Idem aliter.*

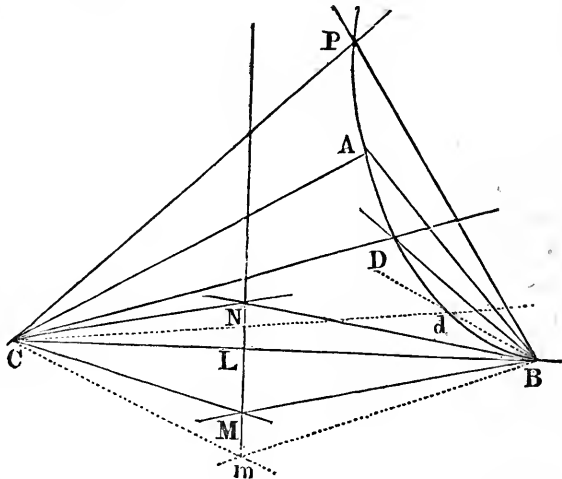
E punctis datis junge tria quævis A, B, C; et circum duo eorum B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos A B C, A C B, applicentur crura B A, C A primò ad punctum D, deinde ad punctum P,

ipsi parallela sit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, nisi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

*Scholium.* Si crura C M, B M concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua C D, B D concursu suo D describunt curvam se-

cundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli B C D, C B D simul evanescent, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, et eadem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac. Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerptimus.

et notentur puncta M, N in quibus altera crura B L, C L casu utroque se decussant. Agatur recta infinita M N, et rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C, eâ lege ut crurum B L, C L vel B M, C M intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam M N; et crurum B A, C A, vel B D, C D, intersectio, quæ jam sit d, trajectoryam quæsitam P A D d B delineabit. Nam punctum d (per Lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta B, C transeuntem; et ubi punctum m accedit ad



puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. e. f.

*Corol. 1.* (\*) Hinc recta expedite duci potest, quæ trajectoryam quæsitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum d ad punctum B, et recta B d evadet tangens quæsitâ.

*Corol. 2.* (\*) Unde etiam trajectoryarum centra, diametri et latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo Lemmatis XIX.

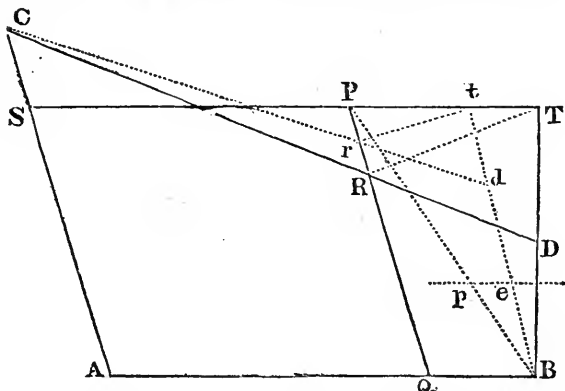
(\*) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ C B. Nam in hoc casu, chorda B d evanescit et positione congruit cum tangente; undè tangens per punctum quodvis datum expedite duci potest etiam nondùm descriptâ sectione conicâ, si punctum illud datum pro polo usurpetur.

(\*) 318. Per quodvis punctorum datorum puta h, duc trajectoryæ tangentem, et per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoryæ jam descriptæ in puncto aliquo; aut si descripta non fuerit trajectorya circa polos, rotentur anguli mobiles,

donec crurum C D, B D concursus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallelâ trajectoryæ occurrit, geometricè quærat per Lem. XIX. Nam (vid. fig. et demonstr. Lem. XX.) cum data sint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio constans rectangulorum  $PQ \times PR$ ,  $PS \times PT$ , hoc est, rectangulorum  $DE \times DF$ ,  $DG \times DH$ , adeoque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concursus trajectoryæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in Coroll. 2º. Lem. XIX. possent etiam trajectoryarum axes et centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

*Scholium.*

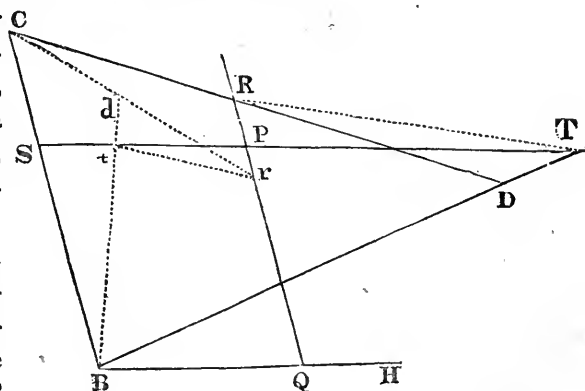
Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo  $B P$ , et in eâ, si opus est, productâ capiendâ  $B p$  ad  $B P$  ut est  $P R$  ad  $P T$ ; et per  $p$  agendo rectam infinitam  $p e$  ipsi  $S P T$  parallelam, et in eâ ( $t$ ) capiendâ semper  $p e$  æqualem  $P r$ ; et agendo rectas  $B e$ ,  $C r$  concurrentes in  $d$ . Nam cum sint  $P r$  ad  $P t$ ,  $P' R$  ad  $P T$ ,  $p B$  ad  $P B$ ,  $p e$  ad  $P t$  in eâdem ratione; erunt  $p e$  et  $P r$  semper æquales. Hâc methodo puncta trajectory inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.



PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

*Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, et rectam  
continget positione datam.*

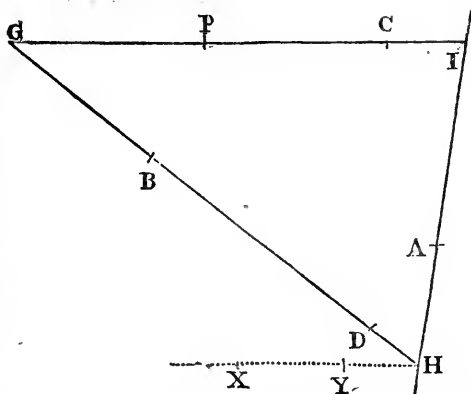
*Cas. 1.* Dentur  $C$   
tangens  $H B$ , punctum contactus  $B$ ,  
et alia tria puncta  $C, D, P$ . Junge  $B C$ ,  $S$   
et agendo  $P S$  parallelam rectæ  $B H$ ,  
et  $P Q$  parallelam rectæ  $B C$ , comple  
parallelogrammum  $B S P Q$ . Age  
 $B D$  secantem  $S P$



(<sup>t</sup>) \* Hoc est linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, et altera assumptæ aequalis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem constr) P r : P t =



*Cas. 2.* Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem H I sita. Junge bina lineis B D, C P concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H et I. Sece-  
tur tangens in A, ita ut sit H A ad I A, ut est rectan-  
gulum sub mediâ proportion-  
ali inter C G et G P et me-  
diâ proportionali inter B H  
et H D, ad rectangulum



sub mediâ proportionali inter D G et G B et mediâ proportionali inter P I et I C; et erit A punctum contactus. Nam si rectæ P I parallela H X trajectoriam secet in punctis quibusvis X et Y: erit (ex conicis) (7) punctum A ita locandum, ut fuerit H A quad. ad A I quad. in ratione compositâ ex ratione rectanguli X H Y ad rectangulum B H D, seti rectanguli C G P ad rectangulum D G B, et ex ratione rectan-  
guli B H D ad rectangulum P I C. Invento autem contactus puncto A, describetur trajectoria ut in casu primo. Q. e. f.

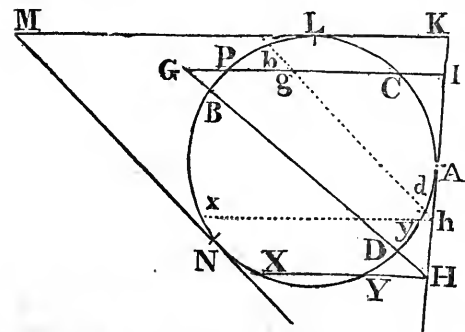
rationi compositæ ex ratione rect. C G P ad rect. D G B et, rect. B H D ad rect. P I C ideoque est H A<sup>2</sup> ad A I ut  $\sqrt{C G P} \times \sqrt{B H D}$  ad  $\sqrt{D G B} \times \sqrt{P I C}$ , sed

H G convenientes in G, et sectionem conicam secantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum C G P  $\times$  B H D, erit ad factum D G B  $\times$  P I C, ad un datâ ratione, nempe in ratione H A<sup>2</sup>, ad A I<sup>2</sup>; Ducta enim linea H Y X lineæ I C P parallela, erit ut prius (per Lem III. de Conic. p. 117.) D G B : B H D = C G P : X H Y =  $\frac{C G P \times B H D}{D G B}$ , est verò H A<sup>2</sup> :

$$A I^2 = X H Y \left( \frac{C G P \times B H D}{D G B} \right);$$

P I C (per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo H A<sup>2</sup> : A I<sup>2</sup> = C G P  $\times$  B H D : D G B  $\times$  P I C.

Quod si linea H Y X, extra sectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ H A I, ducatur alia linea h y x lineæ I C P parallela quæ sectioni occurrat in x et y, et ducatur alia linea h d b g lineæ H D B G Parallela



Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ proportionales inter illorum latera; Ergo est H A ad A I ut est rect. sub mediâ proportionali inter C G et G P et mediâ proportionali inter B H et H D ad rect. sub mediâ proportionali inter D G et G B et mediâ proportionali inter P I et I C. Si itaque H I in A secetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

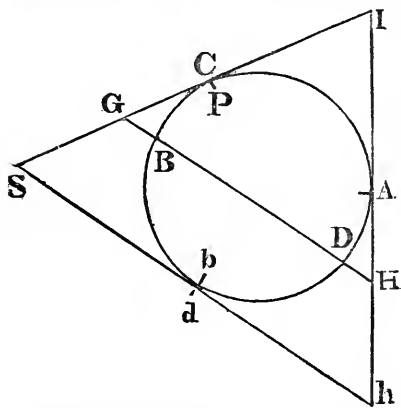
320. Corol. 1. Si ex punctis quibuscumque H et I rectæ H I sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ I G,

ita ut sectioni occurrat in d et b, et lineæ P C in g, habebiturque ut prius h A<sup>2</sup> : A I<sup>2</sup> = C g P  $\times$  b h d : d g b  $\times$  P I C. Sed cum ob parallelas G H, b h sit (per Lemma 3<sup>um</sup>. de Con. p. 117.) C g P : d g b = C G P : D G B, et (per Cor. 3. ejusd. Lem.) sit h A<sup>2</sup> : b h d = H A<sup>2</sup> : B H D substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportionem h A<sup>2</sup> : A I<sup>2</sup> = C g P  $\times$  b h d : d g b  $\times$  P I C fiet H A<sup>2</sup> : A I<sup>2</sup> = C G P  $\times$  B H D : D G B  $\times$  P I C ut prius. Unde satis



puncta S, P et A sunt in unâ rectâ. Et <sup>(a)</sup> eodem argumento probabitur quod puncta R, P et A sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A et P in rectâ RS. Hisce autem inventis, trajectory describetur ut in casu primo problematis superioris <sup>(b)</sup>. Q. e. f.

tionem conicam tangentes et inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursum et contactum



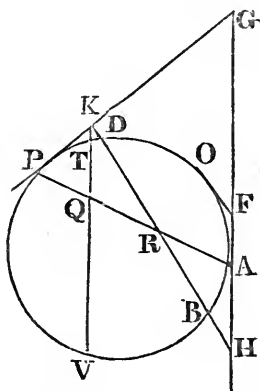
puncta alternatim sumptis A I, C g, d h, et A h, I C, g d, sunt aequalia.

<sup>(2)</sup> Erit ex Conicis rect.  $X I Y$  ad  $L P^2$  ut rect.  $C I D$  ad rect.  $C L D$ . Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente  $K L$  situm et cum linea  $I Y$  sit (per const.) parallela Tangenti  $K L$  et utraque secetur per lineam  $I L$ , illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic p. 117.) rect. partium Parallelae  $I Y$  ab intersectione I ad curvæ puncta X et Y sumptarum ad Rectang. partium Parallelae  $L P$  ab intersectione L ad curvæ puncta (quæ coeunt in uno P quia  $L P$  debet esse Tangens, ideoque illud rectangulum est quadratum  $L P$ ) sicut rect.  $C I D$ , ad rect.  $C L D$  quia nempe hæc rectangula sunt facta partium lineæ secantis  $I L$  factis partium singulae Parallelae correspondentia, ideoque (per const.)  $I Z^2 : L P^2 = S I^2 : S L^2$  atque adeo  $I Z : L P = S I : S L$ , cum igitur sit  $I Z$  parallela  $L P$  (per const.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porro Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in Tangente  $G A$  erit (per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.)  $X I Y$  (sive  $I Z^2$ ) :  $I A^2 = G P^2 : G A^2$  ideoque, &c.

<sup>(a)</sup> Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P et A, sunt in unâ rectâ, si per punctum K, agatur recta  $K V$ , tangenti  $G H$ , parallela, quæ occurrat curvæ in T et V, et in eâ sumatur  $K Q$ , media proportionalis inter  $K T$  et  $K V$ , cum recta  $K H$  secet Parallelas  $K V$  et  $A H$  erit (per Lem. III. de Con. p. 117.)

rectan.  $V K T$  (sive  $K Q^2$ ) ad  $A H^2$  sicut rect.  $B K D$  ad rect.  $B H D$  hoc est ut  $K R^2$  ad  $H R^2$  (per const.) adeoque erit  $K Q : A H = K R : R H$ , quare puncta Q, R, et A erunt in eadem rectâ. Porro Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.)  $V K T (K Q^2) : P K^2 = G A^2 : G P^2$  et  $K Q : P K = G A : G P$ , unde erunt P, Q et A in eadem rectâ, ideoque P, R, et A in eadem rectâ.

<sup>(b)</sup> 322. Corol. 1. Hinc si duæ rectæ  $H G$ ,  $P G$  (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, sectionem conicam tangent in A et P, jungaturque A P et producat, et ex punctis quibuscumque I et



H, in unâ tangentium  $G H$ , sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ  $I D$ ,  $H D$ , quarum altera  $I D$  secet sectionem conicam in C, rectam A P in S, et tangentem  $G P$  in L, altera verò  $H D$  secet sectionem in B, rectam A P, in R, et tangentem  $G P$ , in K; erit semper  $H R^2 : K R^2 = B H D : B K D$ . et  $I S^2 : L S^2 = C I D : C L D$ , quomodocumque inflectantur rectæ  $I D$ ,  $H D$ , et tangentes  $G A$ ,  $G P$ .

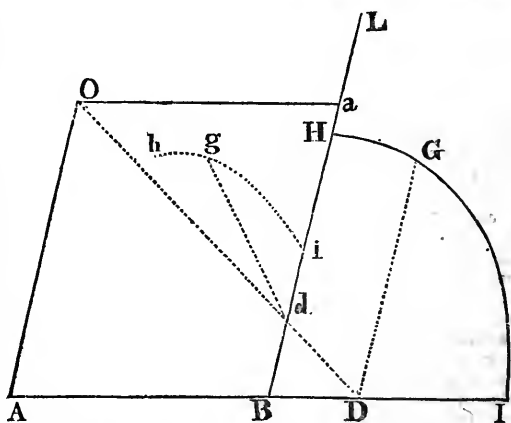
323. Corol. 2. Si puncta D et C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut  $I L S$ , tangens evadat in D, seu C, erit  $C I = D I$ , et  $C L = D L$ , adeoque  $I S^2 : L S^2 = D I^2 : D L^2$ , et  $I S : L S = D I : D L$ . h. e. si Tangens  $I L$ , terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam A B jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes a sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes a puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

In hac propositione, et casu secundo propositionis superioris constructiones eadem sunt, sive recta  $XY$  trajectoriam secet in  $X$  et  $Y$ , sive non secet; eaque non pendent ab hac sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

### LEMMA XXII.

*Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.*

Transmutanda sit figura quævis  $HGI$ . Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ  $AO$ ,  $BL$  tertiam quamvis positione datam  $AB$  secantes in  $A$  et  $B$ , et a figuræ puncto quovis  $G$ , ad rectam  $AB$  ducatur quævis  $GD$ , ipsi  $OA$  parallela. Deinde a puncto aliquo  $O$ , in linea  $OA$  dato, ad punctum  $D$  ducatur recta  $OD$ , ipsi  $BL$  occurrens in  $d$ , et a puncto occursus erigatur recta  $dg$  datum quemvis angulum cum rectâ  $BL$  continens, atque eam habens rationem ad  $Od$  quam habet  $DG$  ad  $OD$ ; et erit  $g$  punctum in figurâ novâ  $hgi$  puncto  $G$  respondens. Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta  $A$



totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum  $G$  motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, et punctum  $g$  motu itidem continuo percurreret puncta omnia figuræ novæ et eandem describeret. Distinctionis gratiâ nominemus  $DG$  ordinatam primam,  $dg$  ordinatam novam;  $AD$  abscissam primam,  $ad$  abscissam novam;  $O$  polum,  $OD$  radium abscindentem,  $OA$  radium ordinatum primum, et  $Oa$  (quo parallelogrammum  $OABa$  completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum  $G$  tangit rectam lineam positione datam, punctum  $g$  tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum  $G$  tangit conicam sectionem punctum  $g$  tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum  $G$  tangit



lineam (°) tertiū ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertiū itidem ordinis; et sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. (d) Etenim ut est a d ad O A ita sunt O d ad O D, d g ad D G, et A B ad A D; ideoque il A D æqualis est  $\frac{O A \times A B}{a d}$ , et D G æqualis est  $\frac{O A \times d g}{a d}$ .

Jam si punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quāvis, quā relatio inter abscissam A D et ordinatam D G habetur, indeterminatæ illæ A D et D G ad unicam tantum dimensionem ascendent, scribendo in hâc æquatione  $\frac{O A \times A B}{a d}$  pro A D, et  $\frac{O A \times d g}{a d}$  pro D G, (e) producetur æquatio nova, in qua abscissa nova a d et ordinata nova d g ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. (f) Sin A D et D G, vel earum alterutra, ascendebant ad duas dimensiones in æquatione primâ, ascendent itidem a d et d g ad duas in æquatione secundâ. Et (g) sic de tribus vel pluribus dimensionibus.

(°) 324. NEWTONUS lineas geometricas in ordinis analyticos distinguit secundum numerum dimensionum æquationis quā relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quod proinde est) secundum numerum punctorum in quibus a lineâ rectâ secari possunt; tot enim dimensiones habet æquatio ad curvam quot possunt esse illius curvæ et rectæ intersectiones; nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere, adeoque tot esse debent æquationis radices ac proinde dimensiones quot sunt intersectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta sola, lineæ secundi sive quadratici ordinis erunt sectiones conicæ et circulus, et lineæ tertiū sive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum et aliae. Cum autem recta inter curvas non sit numeranda, curva primi generis eadem est cum lineâ secundi ordinis, et curva secundi generis eadem cum lineâ tertiū ordinis, et linea ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix et linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob similia triangula, a d O, A O D, a d : O A = O d : O D, (et per constr.) O d : O D = d g : D G, et ob rectas A O, B d parallelas O d : O D = A B : A D; unde a d : O A = d g : D G = A B : A D, atque adeo A D =  $\frac{O A \times A B}{a d}$  et D G =  $\frac{O A \times d g}{a d}$ . Sit O A = a, A B = b, A D

= x, D G = y, a d = z, d g = u, et erit x =  $\frac{b a}{z}$ , y =  $\frac{a u}{z}$ .

(e) \* Sit G I, recta positione data et ad illam æquatio quævis c x + d y + e f = o, in qua +, significat vel +, vel —, loco x et y, substituantur eorum valores (325.)  $\frac{b a}{z}$ ,  $\frac{a u}{z}$  et produ-

cetur  $\frac{c b a}{z} + \frac{d a u}{z} + e f = o$ , hoc est, reductione ad communem denominatorem factâ c b a, + d a u + e f z = o æquatio nova unius dimensionis ad rectam lineam g i.

(f) \* Sit G I, sectio conica et ad illam æquatio generalis, c x x + d y y + e x y + g<sup>2</sup> x + m<sup>2</sup> y + n<sup>3</sup> = v, loco x, y, substituantur  $\frac{b a}{z}$ ,  $\frac{a u}{z}$ , et prodibit æquatio nova ad conicam

sectionem  $\frac{c b^2 a^2}{z^2} + \frac{d a^2 u^2}{z^2} + \frac{e b a^2 u}{z^2} + \frac{b a g^2}{z} + \frac{m^2 a u}{z} + n^3 = o$ , hoc est, reductione factâ, c b<sup>2</sup> a<sup>2</sup> + d a<sup>2</sup> u<sup>2</sup> + e b a<sup>2</sup> u + b a g<sup>2</sup> z + m<sup>2</sup> a u z + n<sup>3</sup> z<sup>2</sup> = o.

(g) \* Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus, nam si in serie 1, x, x<sup>2</sup>, x<sup>3</sup>, x<sup>4</sup>, &c. loco x, et dignitatum ejus substituantur  $\frac{1}{z}$ , et ipsius

dignitates prodibit series nova 1,  $\frac{1}{z}$ ,  $\frac{1}{z^2}$ ,  $\frac{1}{z^3}$ ,  $\frac{1}{z^4}$ , &c. et reductione ad communem denominatorem factâ habebitur  $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1, 1}{z^4}$ . Similiter si

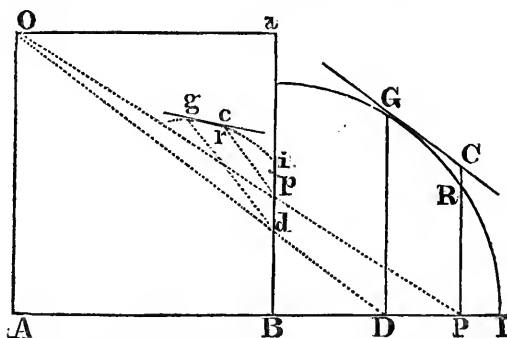
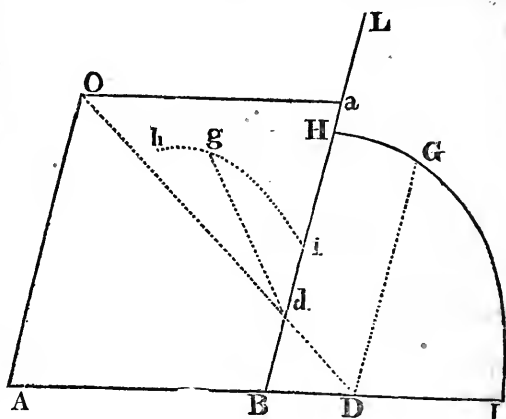
in serie y, y<sup>2</sup>, y<sup>3</sup>, y<sup>4</sup>, &c. loco y, substituitur

Indeterminatæ a d, d g in æquatione secundâ, et A D, D G in primâ ascendunt semper ad eundem dimensionum numerum, et propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.

(h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figurâ novam translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; et contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem et coëunt in figurâ primâ, puncta

$\frac{u}{z}$ , prodibit series nova  $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$ , &c. et per reductionem ad denominatorem communem  $\frac{u z^3, u^2 z^2, u^3 z, u^4}{z^4}$ , iisdem x et y valoribus substitutis in serièbus factorum x y, x y<sup>2</sup>, x y<sup>3</sup>, &c. et x<sup>2</sup> y, x<sup>3</sup> y, &c. et reductione ad communem denominatorem z<sup>4</sup> factâ, habentur series  $\frac{z^2 u, z u^2, z u^3}{z^4}$ , et  $\frac{z u, u^2}{z^4}$ .

Porro æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus et factis composita est, et abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est z<sup>4</sup>, ergò hujusmodi substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam H G I, secet in quolibet punctis, eadem recta translata curvam h g i in totidem punctis intersectare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



(h) 526. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, et ductâ P C parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R et tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut O P : P C = O p : p c parallelam d g, et recta g c, quæ puncta g, et c, jungit, novam curvam g i, tanget in g; nam accedat P C, ad D G, et accedat correspondens p c, ad d g, et punctis C, R, G, coëuntibus, coibunt

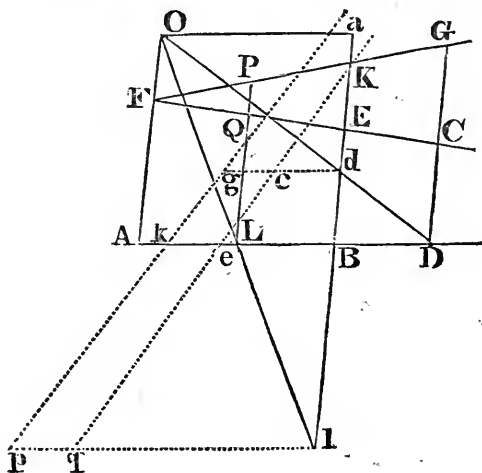
in figurâ novâ puncta c, r, g, adeoque linea g c positione coincidit cum chordâ evanescente g r, hoc est cum tangente in g. Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim P C : p c = P O : p o = P R : p r, et proinde P C : P R = p c : p r, ergo punctum c, non est in curvâ g i, nisi cum C reperitur in curvâ G I, hoc est, nisi C et G coëant.

eadem translata accedent ad invicem et coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, a quibus conflatur, intersectiones transferre, et per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, et lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam <sup>(1)</sup> rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque

(1) 327. Radius ordinatus primus  $O A$ , per concursum  $F$  rectarum  $F G$ ,  $F C$  transeat,  $B e = B E$ ; est enim (per constr.)  $B K : B O = B k : B O$ . et  $B E : B O = B e : B O$ .  
runtur capiendi in novâ ordinatâ  $B k = B K$ ,  
ductâ  $G D$  radio  $O A$  parallelâ, transferantur



puncta  $G, C$ , in  $g, c$ , et puncta  $K, E$ , in  $k, e$ , rectæ  $k g, e c$ , erunt parallelæ; nam ducta intelligatur  $O L$  radio  $O A$  infinitè proxima, et rectas  $A D, a B$  secans in  $L$  et  $l$ , et actâ  $L Q$   $P$  radio  $O A$ , parallelâ, puncta  $P, Q$  in  $p, q$ , translata concipiantur, et erit  $O L : O l = P L : p l = Q L : q l$ . coëuntibus verò punctis  $P, Q, F$  erit  $O l$  infinita et  $Q L = F A = P L$ , adeoque  $p l = q l$ . Punctum igitur concursus  $F$  ad distantiam infinitam transfertur, et lineæ  $g p, c q$ , ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Corol. 1. Puncta  $K, E$  et  $E$ , seu intersectiones linearum  $F G, F C$  cum  $a B$ , transfe-

329. Corol. 2. Si punctum  $F$ , cum puncto  $A$ , coincidat, erunt  $g k, e c$ , rectis  $O A, a B$  parallelæ; nam ob parallelas  $B K, D G, A O$  et (per constr.)  $A B : A D = O d : O D = d g : D G$ , et coëuntibus punctis  $F, A, A B : A D = B K (B k) : D G$ , adeoque  $d g : D G = B k : D G$ , ac proinde  $B k = d g$ , unde  $g k$  lineæ  $B d$  est parallelæ.

330. Corol. 3. Si recta linea  $F G$ , coincidat cum  $A D$ , transformabitur in rectam coincidentem cum  $a B$ , nam punctum  $D$ , transfertur in  $d$ , punctum  $L$ , in  $l$ .

quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum ; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (\*) habebitur solutio quæsitâ.

(<sup>1</sup>) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin : deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item et sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam et circulum.

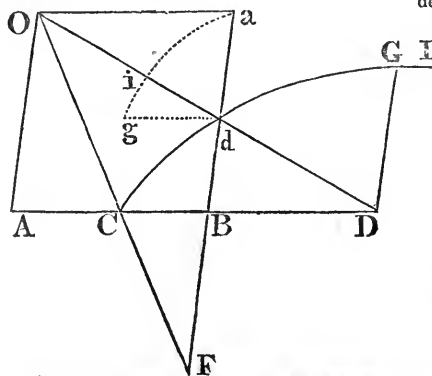
(\*) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(<sup>1</sup>) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, sitque O A = a, A B = b, A C = c, A D = x, C D = x - c, G D = y, nova abscissa, a d = z, nova ordinata g d = u, erit ex naturâ parabolæ  $l x - l c = y y$ , et substitutis pro x, et y, eorum valoribus  $\frac{b a}{z}, \frac{b u}{z}$  (325.) producet æquatio

$$\text{nova ad novam curvam } g i, \frac{l b a}{z} - l c = \frac{b^2 u^2}{z^2}$$

hoc est, reductione factâ  $b^2 u^2 - l b a z + l c z^2 = 0$ , æquatio ad Ellipsim cujus diameter a F =  $\frac{b a}{c}$ , latus rectum =  $\frac{l a}{b}$  nam  $\frac{b a z}{c} -$

$$z^2 : u^2 = \frac{b a}{c} : \frac{l a}{b}.$$



Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, et præterea fiat  $l c = b^2$ , sive  $l \times A C = A B^2$  superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur  $u^2 - \frac{b a z}{c} + z z$

= 0, quæ est ad circulum cujus diameter  $\frac{b a}{c}$ , ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a et b, vel a et c, possunt ad arbitrium assumi, et tertia determinatur per æquationem  $l c = b^2$ , in circulo.

Si vertex C cum puncto A coëat, hoc est, si A C = c = 0 æquatio ad novam curvam erit  $b^2 u^2 - l b a z = 0$ , hoc est, curva g i, erit parabola ; et eodem modo invenitur Ellipsim et Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

Si parabolæ vertex C cum puncto B coëat, erit b = c, adeoque Ellipsis vel circuli g i diameter  $\frac{b a}{c}$ , erit a = O A = A B.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut supra, erit ex naturâ hyperbolæ  $d y^2 = l x^2 - 2 c l x + d l x - l d c + l c c$ , et substitutis loco x et y, eorum valoribus et reductione ad communem denominatorem factâ, producet.

$$d b^2 u^2 + 2 c l b a z + l d c z^2 - l b^2 a^2 - d l b a z - l c^2 z^2 = 0$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo  $l d c - l c^2 = d b^2$ , et angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.

333. His præmissis facillè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, et linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, et lineæ c g f, dērit.

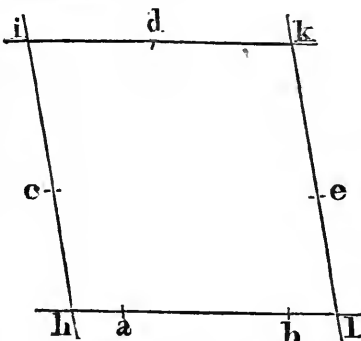
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

*Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, et rectas tres  
continget positione datas.*

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, et concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m)

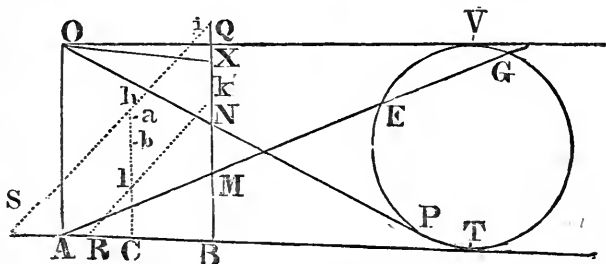
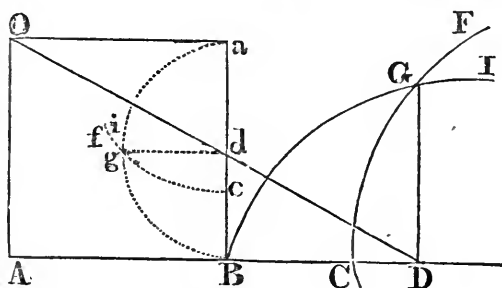
In hac figurâ tangentes illæ duæ evadent  
sibi invicem parallelæ, et tangens tertia  
fiet parallela rectæ per puncta duo data

transeunti. Sunto  $h i$ ,  $k l$  tangentes illæ duæ parallelæ,  $i k$  tangens tertia, et  $h l$  recta huic parallela transien per puncta illa  $a$ ,  $b$ , per quæ conica sectio in hæc figurâ novâ transire debet, et parallelogrammum  $h i k l$



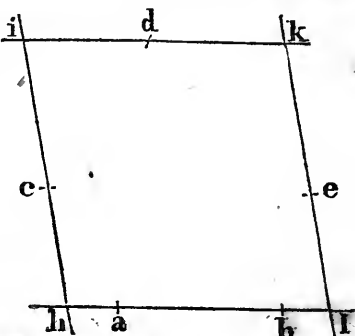
tatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, et per punctum d, agatur radius abscondens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, et erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto inter sectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, et vice versâ (331).

(m) 334. Sit  $O$ , concursus tangentium duarum  $O V$ ,  $O P$ ,  $A$  concursus tangentis tertiæ  $A T$ , cum rectâ  $A G$ , quæ per puncta duo  $E$ ,  $G$ , data transit, age rectam infinitam  $O A$ , eâque adhibita pro radio ordinato primo, et  $O X$  parallelâ  $A T$ , pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur recto ordinato novo  $O X$ , nam recta  $A T$  transformatur in rectam  $B X$  i (350), recta  $A G$  in rectam  $C h$  ipsi  $B X$  parallelam (329) et punctum illius  $C$ , reperitur, capiendi  $B C = B M$  (328). rectæ  $O V$ ,  $O P$  transmutantur in rectas parallelas  $R k$ ,  $S i$ , (327); earumque puncta  $R$ ,  $S$ , habentur capiendi  $B R = B N$ ,



B S = B Q, et alia puncta duo (per Lem. XXII.) facile reperiantur. Puncta E, et G, transferantur in b, et a, et productis lineis parallelis B i et C h, R k, et S i, donec sibi mutuo occurrant, compleatur parallelogrammum l h i k, et nova sectio conica transibit per puncta b, et a, et tangetur a rectis tribus h i, l k, k (526).

complens. <sup>(n)</sup> Secentur rectæ  $h i$ ,  $i k$ ,  $k l$  in  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , ita ut sit  $h c$  ad latus quadratum rectanguli  $a h b$ ,  $i c$  ad  $i d$ , et  $k e$  ad  $k d$  ut est summa rectarum  $h i$  et  $k l$  ad summam trium linearum quarum prima est recta  $i k$ , alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum  $a h b$  et  $a l b$ : et erunt  $c$ ,  $d$ ,  $e$  puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt  $h c$  quadratum ad rectangulum  $a h b$ , et  $i c$  quadratum ad  $i d$  quadratum, et  $k e$  quadratum ad  $k d$  quadratum, et  $e l$  quadratum ad rectangulum  $a l b$  in eadem ratione; et propterea  $h c$  ad latus quadratum ipsius  $a h b$ ,  $i c$  ad  $i d$ ,  $k e$  ad  $k d$  et  $e l$  ad latus quadratum ipsius  $a l b$  sunt in subduplicatâ illâ ratione, et compositè, in datâ ratione omnium antecedentium  $h i$  et  $k l$  ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli  $a h b$ , et recta  $i k$ , et latus quadratum rectanguli  $a l b$ . Habentur igitur ex datâ illâ ratione puncta contactuum  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, et ibi (per Prob. XIV.) describetur trajectorya. Q. e. f. <sup>(o)</sup> Cæterum perinde ut puncta  $a$ ,  $b$  jacent vel inter puncta  $h$ ,  $l$ , vel extra, debent puncta  $c$ ,  $d$ ,  $e$  vel inter puncta  $h$ ,  $i$ ,  $k$ ,  $l$  capi, vel extra. Si punctorum  $a$ ,  $b$  alterutrum cadit inter puncta  $h$ ,  $l$ , et alterum extra, problema impossibile est.



### PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

*Trajectoryam describere, quæ transibit per punctum datum, et rectas quatuor positione datas continget.*

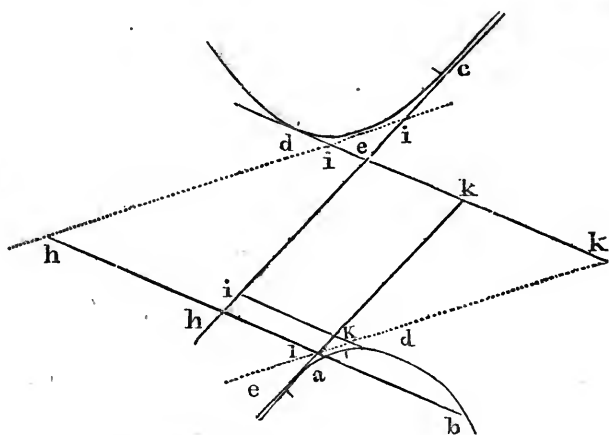
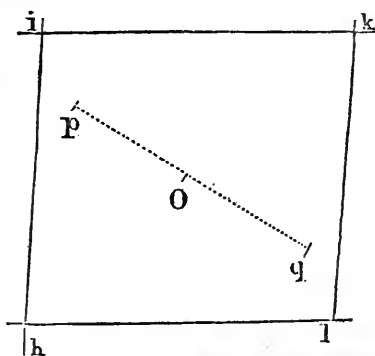
Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad inter-

\* <sup>(n)</sup> Inter  $a h$ ,  $h b$ , quærat media proportionalis quæ dicatur  $M$ , et inter  $a l$ ,  $l b$ , media proportionalis  $N$ ; et deinde ita secentur rectæ  $h i$ ,  $i k$ ,  $k l$ , in  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , ut sit  $h c$ , ad  $M$ ,  $i c$ , ad  $i d$ , et  $k e$  ad  $k d$ , ut est  $h i + k l$ , ad  $i k + M + N$ , et erunt  $c$ ,  $d$ ,  $e$  puncta contactuum; Etenim si fuerint  $c$ ,  $d$ ,  $e$  puncta contactuum,  $o b$ ,  $h l$  parallelam tangenti  $i k$ , quæ cum alterâ tangente  $h i$ , concurrat in  $i$ , erit (per Prop. 16. et 18. lib. 3. Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.)  $h c^2 : a h \times h b = i c^2 : i d^2$ , et  $o b$ ,  $h i$ , occurrentem sectioni in solo puncto  $c$ , et parallelam tangenti  $l k$ , quæ alteri tangenti  $i k$  occurrit in  $k$ , erit (per easdem Prop. Apoll.)  $i c \times i c (i c^2) : i d^2 = k e^2 : k d^2$ , et  $o b$ ,  $h l$ , parallelam tangenti  $i k$ , quæ cum alterâ tangente  $l k$ , convenit in  $k$ , erit (per easdem

Prop. Apoll.)  $k e^2 : k d^2 = e l^2 : a l \times l b$ , adeoque  $h c^2 : a h \times h b = i c^2 : i d^2 = k e^2 : k d^2 = e l^2 : a l \times l b$ , et propterea  $h c : \sqrt{a h \times h b} (M) = i c : i d = k e : k d = e l : \sqrt{a l \times l b} (N)$ , et compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est  $h c : M = i c : i d = k e : k d = e l : N = h c + i c + k e + e l (h i + k l) : M + i d + k d + N (i k + M + N)$ . Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , in figurâ novâ per inversas operationes (351).

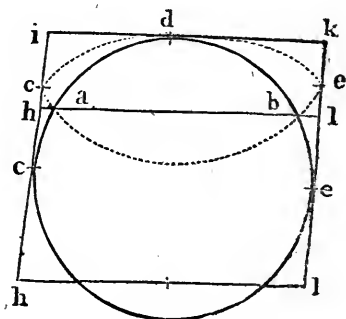
<sup>(o)</sup> 335. Quoniam duæ parallelæ  $h i$ ,  $l k$ , neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas

sectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, et eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, et tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrerant, jam evadent parallelæ. Suntu illæ  $h i$  et  $k l$ ,  $i k$  et  $h l$  continentes parallelogrammum  $h i k l$ . Sitque  $p$  punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum  $O$  agatur  $p q$ , et existente  $O q$  aquali  $O p$ , erit  $q$  punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, et ibi habebuntur puncta duo per quæ trajec-



vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato. Porro Ellipsis tota inter tangentes parallelas, et hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta  $a, b$ , inter puncta  $h, l$  sita sunt; in hyperbolis extra; atque adco si punctorum  $a, b$ , alterum cadit inter puncta  $h, l$  et alterum extrâ, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactûs  $d$ , inter puncta  $i, k$ , necessariò cadit; alia duo  $c, e$ , inter puncta  $h$  et  $i, l$  et  $k$ , vel aliquandò extrâ esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut  $c, d$ , extrâ puncta  $h, i, k, l$ , necessariò posita sunt, tertium ut  $e$ , vel extrâ vel intra esse potest, undè præscribit Newtonus ut puncta  $c, d, e$ , vel inter puncta  $h, i, k, l$ , vel extrâ capiantur, perindè ut puncta  $a, b$ , jacent vel inter puncta  $h, l$ , vel extrâ.

(P) 336. Parallelogrammi  $h, i, k, l$ , sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis



toria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectory illa per Problema XVII. Q. e. f.

### LEMMA XXIII.

*Si rectæ duæ positione datæ A C, B D ad data puncta A, B, terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta C D, quâ puncta indeterminata C, D junguntur, secetur in ratione datâ in K : dico quod punctum K locabitur in rectâ positione datâ.*

(<sup>a</sup>) Concurrent enim rectæ A C, B D in E, et in B E capiatur B G ad A E ut est B D ad A C, sitque F D semper æqualis datæ E G ; et erit ex constructione E C ad G D, hoc est, ad E F ut A C ad B D, ideoque in ratione datâ, et propterea dabitur specie triangulum E F C. Secetur C F in L ut sit C L ad C F in ratione C K ad C D; et ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum E F L; proindeque punctum L locabitur in rectâ E L positione datâ. Junge L K, et similia erunt triangula C L K, C F D; et ob datam F D et datam rationem L K ad F D dabitur L K. Huic æqualis capiatur E H, et erit semper E L K H parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato H K. Q. e. d.

*Corol.* Ob datam specie figuram E F L C, rectæ tres E F, E L et E C, id est G D, H K et E C, datas habent rationes ad invicem.

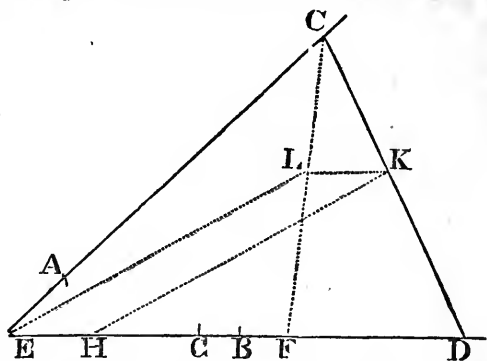
### LEMMA XXIV.

*Si rectæ tres tangant quamcunque conï sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione ; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallelâ, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum et tangenti tertiæ interjecta.*

Sunto A F, G B parallelæ duæ conï sectionem A D B tangentes in A et B; E F recta tertia conï sectionem tangens in I, et occurrens prioribus tangentibus in F et G; sitque C D semidiameter figuræ tangentibus parallelâ : dico quod A F, C D, B G sunt continuè proportionales.

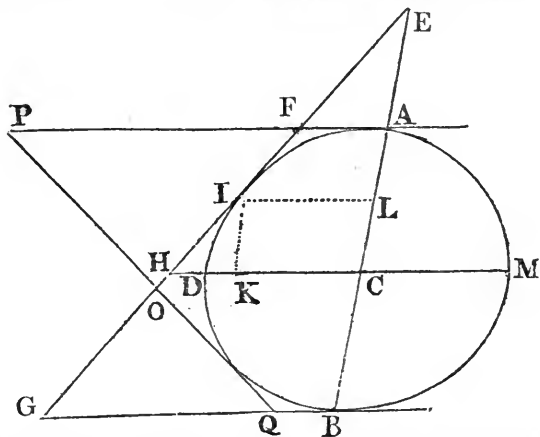
centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per Prop. 27. et 31. Lib. 2. Conic. Apoll utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

(<sup>a</sup>) \* Vid. not. 67. pag. 28.





Nam si diametri conjugatæ  $AB$ ,  $DM$  tangenti  $FG$  occurrant in  $E$  et  $H$  seque mutuo secant in  $C$ , et compleatur parallelogrammum  $IKCL$ ; (\*) erit ex naturâ sectionum conicarum ut  $EC$  ad  $CA$  ita  $CA$  ad  $CL$ , et ita divisim  $EC - CA$  ad  $CA - CL$ , seu  $EA$  ad  $AL$ , et compositè  $EA$  ad  $EA + AL$  seu  $EL$  ut  $EC$  ad  $EC + CA$  seu  $EB$ ; ideoque ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $ELI$ ,  $ECH$ ,  $EBG$ ,  $AF$  ad  $LI$  ut  $CH$  ad  $BG$ . Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum,  $LI$  seu  $CK$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $CH$ ; (\*\*) atque ideo ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $CD$  ut  $CD$  ad  $BG$ . Q. e. d.



*Corol. 1.* Hinc si tangentes duæ  $FG$ ,  $PQ$  tangentibus parallelis  $AF$ ,  $BG$  occurrant in  $F$  et  $G$ ,  $P$  et  $Q$ , seque mutuo secant in  $O$ ; erit ex æquo perturbatè  $AF$  ad  $BQ$  ut  $AP$  ad  $BG$ , (†) et divisim ut  $FP$  ad  $GQ$ , atque ideo ut  $FO$  ad  $OG$ .

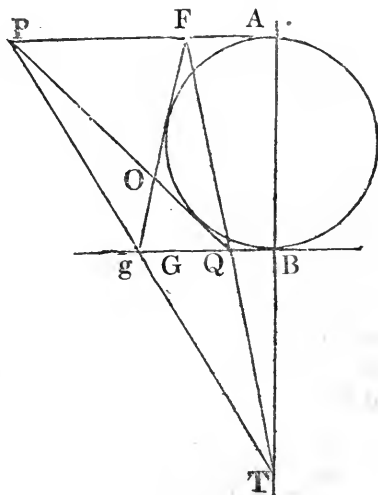
*Corol. 2.* (‡) Unde etiam rectæ duæ  $PG$ ,  $FQ$ , per puncta  $P$  et  $G$ ,  $F$

(\*) \* Erit ex naturâ sectionum conicarum, &c. (per Prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. Apoll. vide Cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.)

(†) \* Cum sit  $EA : EL = EC : EB$ , et ob similitudinem triangulorum  $EAF$ ,  $ELI$  sit  $EA : EL = AF : LI$ , seu  $CK$ , et ob similitudinem triangulorum  $ECH$ ,  $EBG$  sit  $EC : EB = CH : BG$ , erit  $AF : CK = CH : BG$ , et quia (ex Conic. loco citato)  $CK : CD = CD : CH$ , erit  $AF \times CK : CK \times CD = CH \times CD : BG \times CH$ , hoc est,  $AF : CD = CD : BG$ .

(‡) \* Est enim  $AF : CD = CD : BG$ , et similiter  $BQ : CD = CD : AP$ , seu  $CD : BQ = AP : CD$ , adeoque  $AF \times CD : CD \times BQ = CD \times AP : BG \times CD$ , hoc est  $AF : BQ = AP : BG = AP - AF : BG - BQ = FP : GQ = FO : OG$ , ob similia triângula  $FOP$ ,  $GOQ$ .

(§) \* Agatur enim recta  $FQ$ , ipsi  $AB$  occurrens in  $T$ , et jungatur  $PT$ , rectam  $BG$ , secans in  $g$ , erit  $AF : BQ = AT : BT = AP : Bg$ , sed per Corol. 1.  $AF : BQ =$

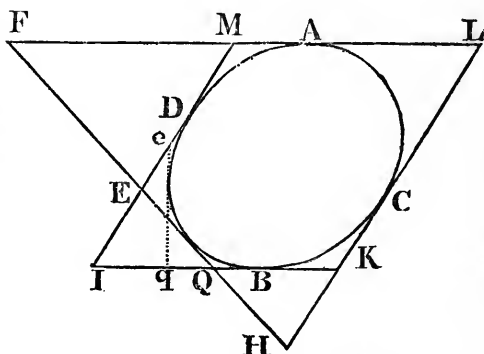


et  $Q$  ductæ, concurrent ad rectam  $A C B$  per centrum figuræ et puncta contactuum  $A, B$  transeuntem.

### LEMMA XXV.

*Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, et abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus et latus tertium est ad abscissarum alteram.*

Tangant parallelogrammi  $M L I K$  latera quatuor  $M L, I K, K L, M I$  sectionem conicam in  $A, B, C, D$ , et secet tangens quinta  $F Q$  hæc latera in  $F, Q, H$  et  $E$ ; sumantur autem laterum  $M I, K I$  abscissæ  $M E, K Q$ , vel laterum  $K L, M L$  abscissæ  $K H, M F$ : dico



quod sit  $M E$  ad  $M I$  ut  $B K$  ad  $K Q$ ; et  $K H$  ad  $K L$  ut  $A M$  ad  $M F$ . Nam per corollarium primum lemmatis superioris est  $M E$  ad  $E I$  ut  $A M$  seu  $B K$  ad  $B Q$ , et componendo  $M E$  ad  $M I$  ut  $B K$  ad  $K Q$ . Q. e. d. Item  $K H$  ad  $H L$  ut (\*)  $B K$  seu  $A M$  ad  $A F$ , et dividendo  $K H$  ad  $K L$  ut  $A M$  ad  $M F$ . Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si datur parallelogrammum  $I K L M$ , circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum  $K Q \times M E$ , ut et huic æquale rectangulum  $K H \times M F$ . Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum  $K Q H, M F E$ .

*Corol. 2.* Et si sexta ducatur tangens  $e q$  tangentibus  $K I, M I$  occurrens in  $q$  et  $e$ ; (†) rectangulum  $K Q \times M E$  æquabitur rectangulo  $K q \times M e$ ; eritque  $K Q$  ad  $M e$  ut  $K q$  ad  $M E$ , et divisim ut  $Q q$  ad  $E e$ .

$A P : B G$ , est igitur  $B G = B g$  ac proindè punctum  $g$ , cum  $G$  coincidit.

(\*) \* Nam si puncta contactuum  $A$ , et  $B$ , rectâ jungantur, hæc transibit per centrum com-

mune sectionis conicæ et parallelogrammi, (336) adeoque erit  $A M = B K$ .

(†) \* Nam rectangula  $K Q \times M E, K q \times M e$ , æquantur rectangulo  $M I \times B K$ .



sibit per centrum trajectorye. Rursus figurae quadrilaterae  $B G D F$  sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentae, diagonales (ut ita dicam)  $B D$ ,  $G F$  biseca in  $P$  et  $Q$ : et recta  $P Q$  per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectorye. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud  $O$ . <sup>(b)</sup> Tangenti cuivis  $B C$  parallelam age  $K L$ , ad eam distantiam ut centrum  $O$  in medio inter parallelas locetur, et acta  $K L$  tanget trajectorym describendam. Secet haec tangentes alias quasvis duas  $G C D$ ,  $F D E$  in  $L$  et  $K$ . Per harum tangentium non parallelarum  $C L$ ,  $F K$  cum parallelis  $C F$ ,  $K L$  concursus  $C$  et  $K$ ,  $F$  et  $L$  age  $C K$ ,  $F L$  concurrentes in  $R$ , et recta  $O R$  ducta et producta secabit tangentes parallelas  $C F$ ,  $K L$  in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, et tum demum per construct. Prob. XIV. trajectorym describere. Q. e. f.

### Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoryarum vel centra vel asymptoti, includuntur in praecedentibus. <sup>(c)</sup> Nam datis punctis et tangentibus una cum

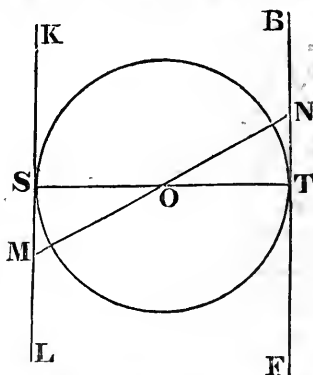
dantur lineae  $e Q$ ,  $E q$ , linea eas bisecans erit locus centri figurae: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineae  $E D$ ,  $e q$ ,  $E Q$ ,  $Q B$  sive sese decussent sive trapezium constituent, concipiatur illas diametros duci quarum vertex est in puncto contactus harum linearum donec occurrant curvae altero suo vertice, tangentes in eo vertice ductae erunt parallelae prioribus: Dabuntur ergo parallelae duabus lineis  $E D$ ,  $Q B$ , quae erunt tangentes curvae, ideoque fiet ut in Lemmatis hypotesi parallelogrammum  $MIKL$

constans quatuor tangentibus quarum oppositae erunt inter se parallelae, et tangentes  $E Q$  et  $e q$  considerari poterunt ut quinta et sexta tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus Corollarium 3. si bisecentur lineae  $E q$ ,  $e Q$  et recta per bisectionum puncta agatur, transibit haec per centrum Sectionis Conicae, &c.

<sup>(b)</sup> 337. Datis sectionis conicae centro  $O$ , et tangente quavis  $B F$ , altera tangens  $L K$  datae parallela facile invenitur; Nam per centrum  $O$  ducatur recta quavis infinita  $M O N$  tangenti datae occurrens in  $N$ , et sumpta  $O M = O N$  per  $M$  ducatur  $M K$  tangenti datae  $B F$  parallela, erit  $M K$  tangens; si enim per punctum contactus  $T$  et centrum  $O$  agatur sectionis diameter  $T O S$ , erit  $S O = O T$  et tangens in  $S$  tangenti in  $T$  parallela lineam  $N O M$  ita secabit in  $M$ , ut sit  $M O = O N$ , ob,  $S O : O T = M O : O N$ .

<sup>(c)</sup> 338. Hinc datis praeter centrum tribus

tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus et puncto, vel tangente et punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor et puncta duo, vel tangens et puncta quatuor, vel puncta sex,



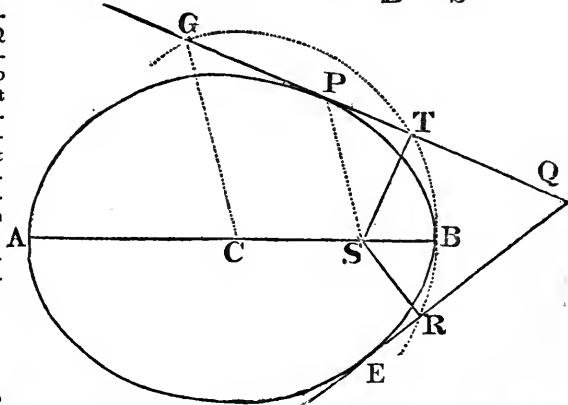
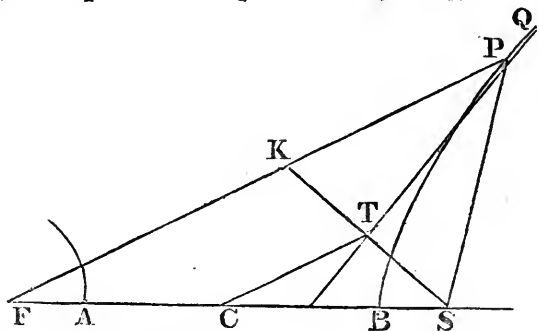
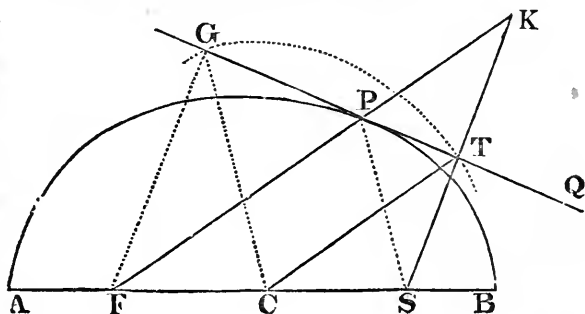
quibus datis trajectory describi potest per Prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, et duabus tangentibus non parallelis, vel tangente et puncto trajectorye Ellipticae et Hyperbolicae ex Lemmatibus sequentibus facile describuntur.

centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, et ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, et tangens vertetur in asymptoton, atque constructiones Problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi asymptotos datur.

339. *Lemma.* Si ex sectionis conicæ umbilico uel trovis S demittantur a tangentem P Q normales ST, F G, recta C T, C G centrum sectionis C et puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principalibus C B, et parallelæ lineis F P, S P ex altero umbilico F et S ad punctum contactus P ductæ. Producantur enim F P, S T, donec concurrant in K, et erit (per Lem. XV. Newt.)  $FK = 2 CB$ ,  $KT = TS$ , cumque sit etiam  $FC = CS$ , erit  $ST : SK = SC : SF$ , et ideo quia latera SK, SF secantur proportionaliter in T et C erit C T parallela FK sive F P, ideoque erit  $ST : SK = CT : FK$  et quia  $ST = \frac{1}{2} SK$  erit C T æqualis  $\frac{1}{2} FK$ , seu æqualis C B. Eodem modo probabitur, C G esse æqualem C B et parallelam lineæ P S.

340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus et axe principali A B, describitur sectio conica. Nam si centro C et intervallo C B æqualis semi-axi principali describatur circulus tangentes secans in T et R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, dantur positioni axis principalis C B, et ipsius longitudo ac umbilici duo.

541. Datis centro C, tangente P Q, et puncto contactus P, cum axe principali, trajectory conica describitur. Centro enim C, et intervallo æquali semiaxi principali de tangentem secans in T et perpendiculum T S, et junct



tum contactus ducatur  $PS$  ipsi  $CG$  parallel  
perpendiculo  $TS$  occurrens in  $S$ , erit  $S$  umbili-  
cus (539).

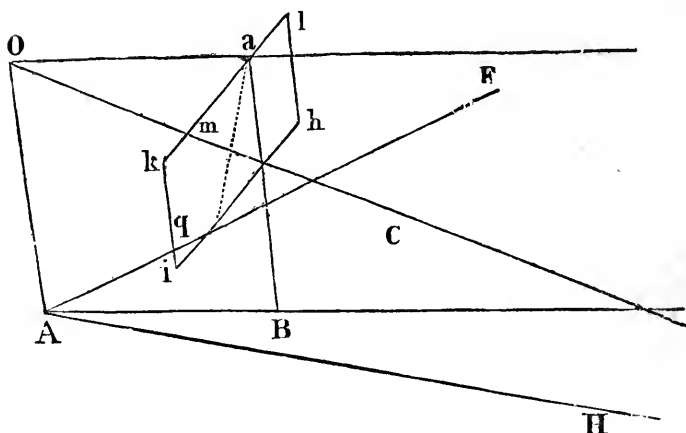








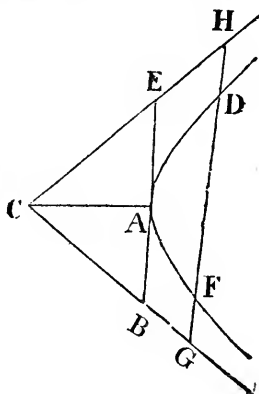




specie hyperbolæ seu axium ratione datur asymptotorum angulus  $E C B$ , et viceversâ dato asymptotorum angulo datur specie hyperbolæ; his positis problema facile solvitur.

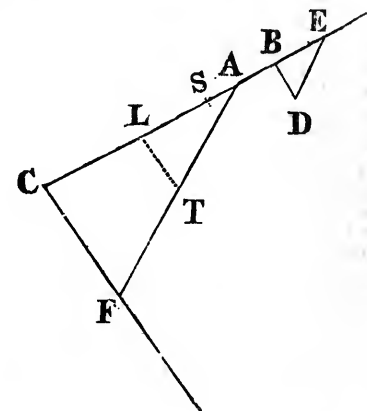
*Cas. 1.* Data sit asymptotus  $CH$ , cum axium ratione seu asymptotorum angulo et punctis duobus  $D, F$ , per puncta illa age rectam infinitam  $DF$ , asymptoto datæ occurrentem in  $H$ , fac  $FG = HD$ , et per punctum  $G$ , age rectam infinitam  $GC$ , quæ cum asymptoto  $CH$ , efficiat angulum  $H C G$ , æqualem angulo

per punctum  $D$  datum agantur recta  $BD$ , ad angulum  $DBE$  datum, seu æqualem asymptotorum angulo, et  $DE$  tangenti  $FA$  parallela, capiantur  $BS$  æqualis mediæ proportionali inter  $BE$  et  $AE$ , et  $AC$  æqualis  $2 SE$ , erit  $C$  hyperbolæ centrum,  $CF$  verò rectæ  $BD$  parallela asymptotus altera. Nam sit  $T$  punctum contactus,  $CF$  asymptotus altera, ductâ  $TL$



asymptoto dato, erit  $CG$ , asymptotus altera (per Prop. 8<sup>am</sup>. Lib. 2. Conic. Apoll. sive Lemma I. de Conic.) quare describetur hyperbola (346).

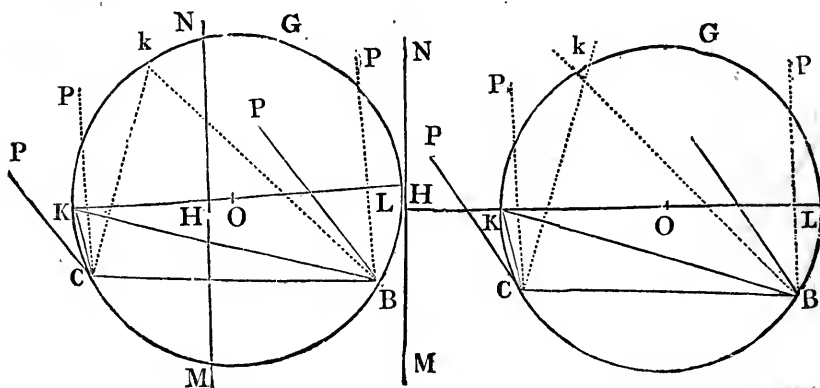
*Cas. 2.* Data sit asymptotus  $CE$ , cum asymptotorum angulo, puncto  $D$ , et tangente  $FA$ ;



asymptoto  $FC$  parallela, erit  $FT = TA$  (per Prop. 3<sup>am</sup>. Lib. 2. Conic. Apoll. sup. Theor. I. de Hyp. p. 93.) ac proinde  $LA = CL$ : Est autem ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos  $CL \times LT$ , hoc est  $AL \times LT = CB \times BD$ , adeoque  $BD : LT = AL : CB$ . ( $2 AL + AB$ ) et ob triangula similia  $ALT$ ,  $EBD$ ,  $BD : LT = BE : AL$ ; ergo  $BE : AL = AL : 2 AL + AB$ , sed (per



revolvantur circa polos suos B, C in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura C N, B N, concursu suo K vel k, circum



B G K C. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam M N, ad quam altera illa crura C N, B N interea concurrebant, dum trajectory describebatur, demitte normalem O H circulo occurrentem in K et L. Et ubi crura illa altera C K, B K concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius est, crura prima C P, B P parallela erunt axi majori, et perpendicularia minori; et contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur trajectorye centrum, dabuntur axes. <sup>(d)</sup> Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

<sup>(e)</sup> Axiom vero quadrata sunt ad invicem ut K H ad L H, et inde facile est trajectoryam <sup>(f)</sup> specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, P C K, P B K; his autem datis describi potest circulus B G K C. Tum ob datam specie trajectoryam, dabitur ratio O H ad O K, ideoque ipsa O H. Centro O et intervallo O H describe alium circumulum, et recta, quæ tangit hunc circumulum, et transit per concursum crurum C K, B K, ubi crura prima C P, B P concurrunt ad quartum

× L N, ac proinde G H : H I = G L<sup>2</sup> : G K<sup>2</sup>; unde D I<sup>2</sup> : G P<sup>2</sup> = L I<sup>2</sup> × G L<sup>2</sup> : G L<sup>2</sup> × G K<sup>2</sup> = L I<sup>2</sup> : G K<sup>2</sup>, et D I : G P = L I : G K, atque adeo L I : D I = G K : G P; sed supra invenimus G P + L P : G P = L I : D I, ergo G K : G P = G P + L P : G P, atque ita G K = G P + L P, seu G L + L K = G L + 2 L P, ac proinde L K = 2 L P, et L P =  $\frac{1}{2}$  L K; invento autem puncto contactus P, si capiatur P Q = P G, et per punctum Q, agatur Q C, ipsi L H parallela, erit

Q C altera asymptotus, et hyperbola describitur (346).

<sup>(d)</sup> \* Vid. not. 314.

<sup>(e)</sup> \* Vid. not. 315.

<sup>(f)</sup> Sit describenda trajectory specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B constituentur poli et junctis C P, B P erunt P C B, P B C anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura B P, C P sint sibi invicem parallela, nempe in positione quavis B p, C p, et crura alia B C, C B se mutuo intersecant in F; et centro O describe circumulum per

datum punctum, erit regula illa  $M N$  cujus ope trajectory describetur. (6) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt et alia lemmata quorum ope trajectorye specie datæ, datis punctis et tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta

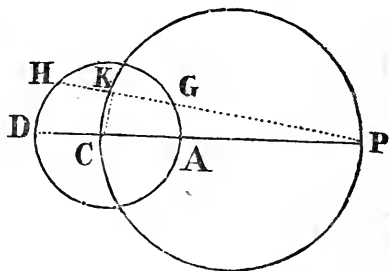
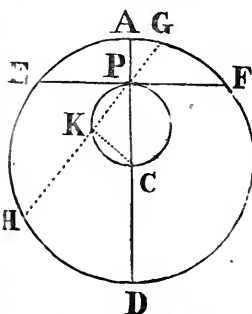
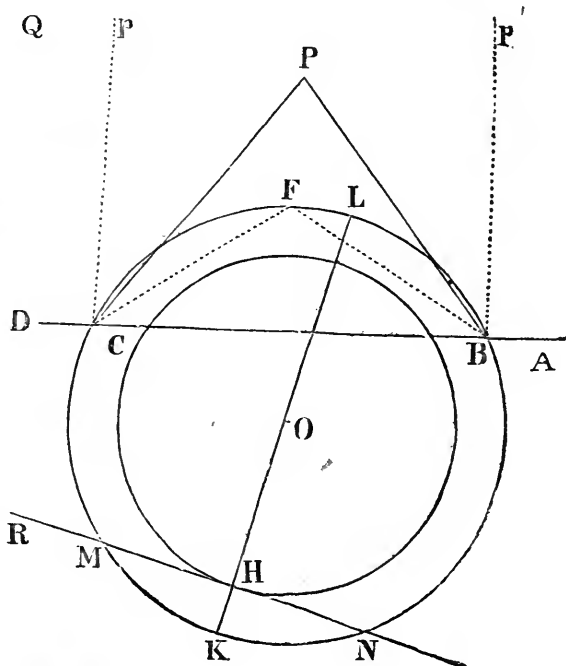
tria puncta  $C, F, B$  transeuntem cujusque proinde segmentum  $C F B$  capit angulum  $C F B$ , centro  $O$  radio  $O H$  describatur circulus, (punctum verò  $H$ , ita determinetur in Diametro  $K L$  ut sit  $K H$  ad  $L H$  ut sunt ad invicem quadrata axium trajectorye). Tum crurum  $B P, C P$  concursus adducatur ad punctum  $Q$  et interea notetur punctum  $R$  ubi concurrunt alia crura  $C A, B D$ , et ex puncto  $R$  agatur recta  $R M N$  tangens circulum radio  $O H$  descriptum, erit  $N M$  regula cujus ope trajectory describetur (314).

Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto  $R$  recta  $R N$ , circulum  $C K B$  tangens; nam in parabola punctum  $H$ , coïncidit cum puncto  $K$  (313).

Quoniam autem ex puncto  $R$ , duæ tangentes ut  $R N$  duci possunt, patet duas trajectoryas specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(6) \* Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, et huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deinde in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscripâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) \* Hoc Lemma facillè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum  $A F D E$  datum sit punctum  $P$  per quod et per centrum circuli  $C$  agatur  $P D$ ; tum diametro  $P C$  describatur circulus  $P K C P$ , chorda quâlibet



$G H$  per punctum  $P$  ducta, bifariam divisa est in puncto  $K$  ubi circulo  $P K C$  occurrit; Nam junctâ  $K C$ , erit angulus  $C K P$  rectus ac proinde chorda  $H G$  bisecta in  $K$ .

\* Idem Lemma pari facilitate in ceteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum  $P$ , per hoc et per centrum  $C$

linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam conic sectionem in punctis duobus intersecet, et intersectionum intervallum biseccetur, punctum bisectionis tanget aliam conic sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

### LEMMA XXVI.

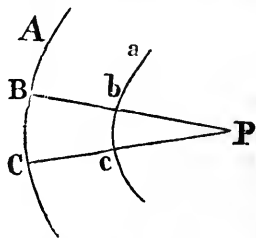
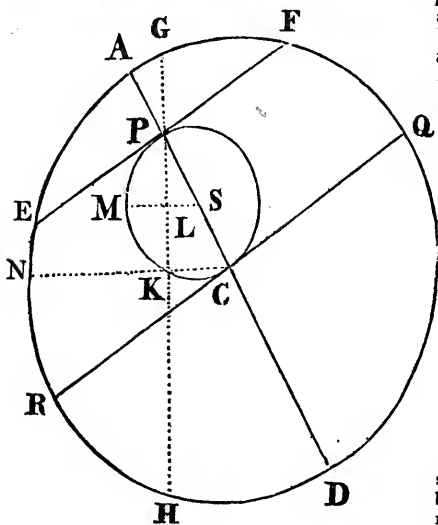
*Trianguli specie et magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.*

Dantur positione tres rectæ infinitæ  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , et oportet triangulum  $DEF$  ita locare, ut angulus ejus  $D$  lineam  $AB$ , angulus  $E$  lineam  $AC$ , et angulus  $F$  lineam  $BC$  tangat. Super  $DE$ ,  $DF$  et  $EF$ , describe tria circulorum segmenta  $DRE$ ,  $DGF$ ,  $EMF$ , quæ capiant an-

sectionis conicæ  $AFDE$  agatur diameter  $AD$ , tùm diametro  $PC$ , quæ similis sit diametro  $AD$ , describatur alia sectio conica  $PMKC$ , ejusdem speciei cum datâ, et diameter

in  $L$  et sectioni in  $M$ , erunt  $SM$ ,  $NC$  diametri similes, et earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus  $PSL$ ,  $PCK$  est  $PS = SC$  erit quoque  $PL = LK$ , ac proindè  $PLK$  erit ordinata ad diametrum  $SM$ , adeoque  $GKH$  erit ordinata ad diametrum  $NC$ ; quare  $GK = KH$  ergo punctum bisectionis  $K$  tanget curvam priori similem et axes habentem prioris axibus parallelos. Eadem est demonstratio, si punctum  $P$  extra sectionem sumatur.

354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis  $P$  dato ducatur recta  $PB$ , curvæ cuilibet  $ABC$  occurrens in



conjugata ipsius  $PC$ , similis erit et parallela diametro  $RQ$ , conjugatæ ipsius  $AD$ , et quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallelæ sint, cætera omnia latera similia sunt etiam parallelæ, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeoque et axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum  $P$ , chorda quævis  $GPH$ , sectioni  $PMKC$  occurrens in  $K$ , dico esse  $KH = KG$ . Nam jungatur  $CK$ , et producaturs donec trajectory  $AHD$  occurrat in  $N$ , et per centrum  $S$  trajectory  $PKC$ , agatur  $SM$  parallela  $CK$ , chordæ  $PK$  occurrens

$B$ , et recta illa  $PB$  ita dividatur in  $b$ , ut sit semper  $Pb$  ad  $PB$  in ratione datâ, punctum  $b$ , tanget curvam  $abc$  ejusdem speciei et ordinis cum curvâ  $ABC$ , atque lineas habentem similibus curvæ  $ABC$  lineis parallelas. Nam si fuerit  $ABC$  polygonum rectilineum cujus latus unum  $BC$ , cum sit (per hyp.)  $Pb : PB = Pc : PC$ , similia erunt triangula  $PBC$ ,  $Pbc$ , et latera  $BC$ ,  $bc$ , parallelæ et in datâ ratione  $PB$ , ad  $Pb$ , ac proindè totum polygonum  $ABC$  simile polygono  $abc$ , et eorum latera homologa parallelæ erunt. Laterum polygoni  $ABC$  numerus augeatur in infinitum et ipsorum longitudo in infinitum minuatur et duo polygona  $ABC$ ,  $abc$  mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallelæ.

gulos angulis  $BAC$ ,

$ABC$ ,  $ACB$

æquales respec-

tivè. Describan-

tur autem hæc seg-

menta ad eas par-

tes linearum  $DE$ ,

$DF$ ,  $EF$ , ut

literæ  $DR$   $ED$

eodem ordine cum

literis  $BACB$ ,

literæ  $DGF$   $D$

eodem cum literis

$ABCA$ , et lite-

ræ  $EMFE$  eo-

dem cum literis  $A$

$CBA$  in orbem

redeant; deinde

compleantur hæc

segmenta in circulos integros. Se-

cent circuli duo

priores se mutuo

in  $G$ , sintque cen-

tra eorum  $P$  et  $Q$ .

Junctis  $GP$ ,  $PQ$ ,

cape  $G$  a ad  $AB$

ut est  $GP$  ad  $PQ$ ,

et centro  $G$ , inter-

vallo  $G$  a des-

cribere circum-

lulum, qui

secet circum-

lulum primum  $DGE$  in  $a$ .

Jungatur tum a  $D$  secans circum-

lulum secundum  $DFG$  in  $b$ , tum a  $E$  secans circum-

lulum tertium  $EMF$  in  $c$ .

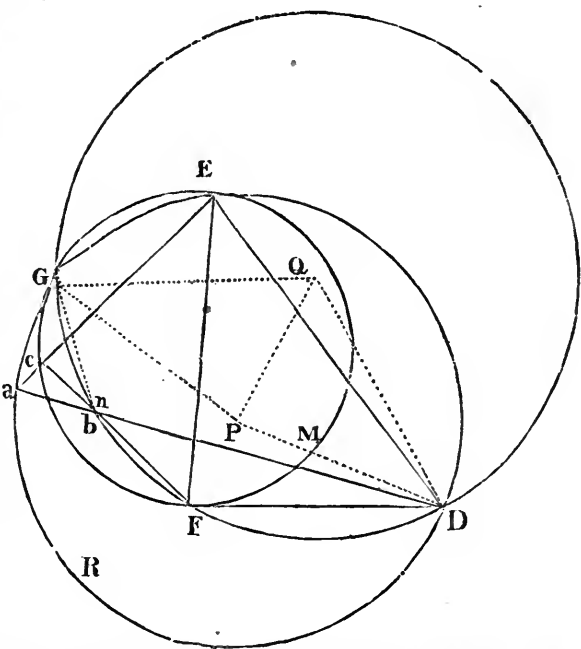
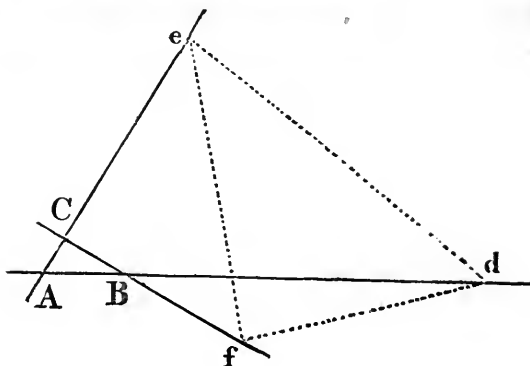
Et jam licet figuram  $ABC$   $d e f$  constituere similem et æqualem figuræ

$abc$   $DEF$ . Quo facto perficitur problema.

Agatur enim  $Fc$  ipsi a  $D$  occurrens in  $n$ , et jungantur a  $G$ ,  $bG$ ,  $QG$ ,

$QD$ ,  $PD$ . Ex constructione est angulus  $EaD$  æqualis angulo  $CAB$ ,

et <sup>(1)</sup> angulus a  $cF$  æqualis angulo  $ACB$ , ideoque triangulum a  $nc$  tri-



secet circumlulum primum  $DGE$  in  $a$ . Jungatur tum a  $D$  secans circumlulum secundum  $DFG$  in  $b$ , tum a  $E$  secans circumlulum tertium  $EMF$  in  $c$ . Et jam licet figuram  $ABC$   $d e f$  constituere similem et æqualem figuræ  $abc$   $DEF$ . Quo facto perficitur problema.

Agatur enim  $Fc$  ipsi a  $D$  occurrens in  $n$ , et jungantur a  $G$ ,  $bG$ ,  $QG$ ,  $QD$ ,  $PD$ . Ex constructione est angulus  $EaD$  æqualis angulo  $CAB$ , et <sup>(1)</sup> angulus a  $cF$  æqualis angulo  $ACB$ , ideoque triangulum a  $nc$  tri-

<sup>(1)</sup> \* Angulus a  $cF$  æqualis angulo  $ACB$ , anguli in segmento  $EMF$  complementum ad nam angulus  $FcE$  est anguli a  $cF$  atque etiam duos rectos, quare angulus a  $cF$ , est æqualis





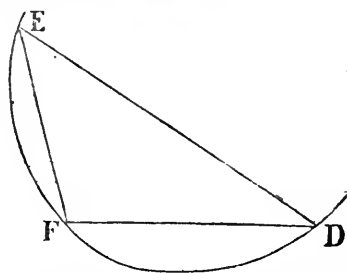
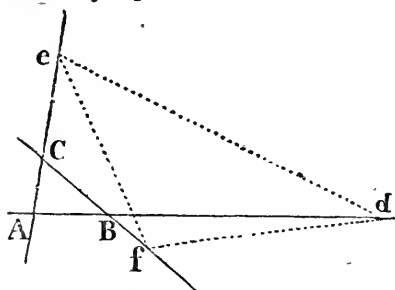
$G P$  ad  $P Q$ ; id est (ex constructione) ut  $G a$  ad  $A B$ .  $\mathcal{A}$ equantur itaque  $a b$  et  $A B$ ; et propterea triangula  $a b c$ ,  $A B C$ , quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli  $D E F$  anguli  $D$ ,  $E$ ,  $F$  trianguli  $a b c$  latera  $a b$ ,  $a c$ ,  $b c$  respectivè, compleri potest figura  $A B C d e f$  figuræ  $a b c D E F$  similis et æqualis, atque eam complendo solvetur problema.  $Q. e. f.$

*Corol.* Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum  $D E F$ , puncto  $D$  ad latus  $E F$  accedente, et lateribus  $D E$ ,  $D F$  in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data  $D E$  rectis positione datis  $A B$ ,  $A C$ , et pars data  $D F$  rectis positione datis  $A B$ ,  $A C$ , interponi debet; et applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

## PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

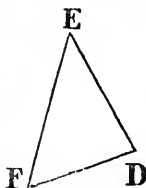
*Trajectoriam specie et magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.*

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis et æqualis lineæ curvæ  $D E F$ , quæque a rectis tribus  $A B$ ,  $A C$ ,  $B C$  positione datis, in partes datis hujus partibus  $D E$  et  $E F$  similes et æquales secabitur.



Age rectas  $D E$ ,  $E F$ ,  $D F$ , et trianguli hujus  $D E F$  pone angulos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI.) <sup>(1)</sup> dein circa

duæ  $G C$ ,  $A B$  sint parallelæ et oporteat triangulum datum  $D E F$  ita locare ut angulus ejus  $D$  lineam  $A B$ , angulus  $E$  lineam  $G C$ , et angulus  $F$  lineam  $B C$  tangat, centro quovis  $i$  in lineâ  $G C$ , ad arbitrium sumpto et radio  $i \delta$ , aequali  $E D$ , describatur circulus rectæ  $A B$ , occurrens in  $\delta$ ; super basi  $i \delta$  construatur triangulum  $i \delta \phi$  simile et æquale triangulo dato  $E D F$ , et ex angulo illius  $\phi$  agatur  $\phi x$  rectæ  $B C$  pa-



rallela secans  $G C$  in  $x$ , et  $A B$  in  $b$ , et compleatur figura  $C B f d e$  similis et æqualis figuræ  $x b \phi \delta i$ , patet factum. Si recta  $E D$  minor sit parallelarum  $G C$ ,  $A B$  distantia, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio  $i \delta$ , descriptus, rectam  $A B$  in duobus punctis secabit, et duæ erunt rectæ  $i \delta$  positiones.

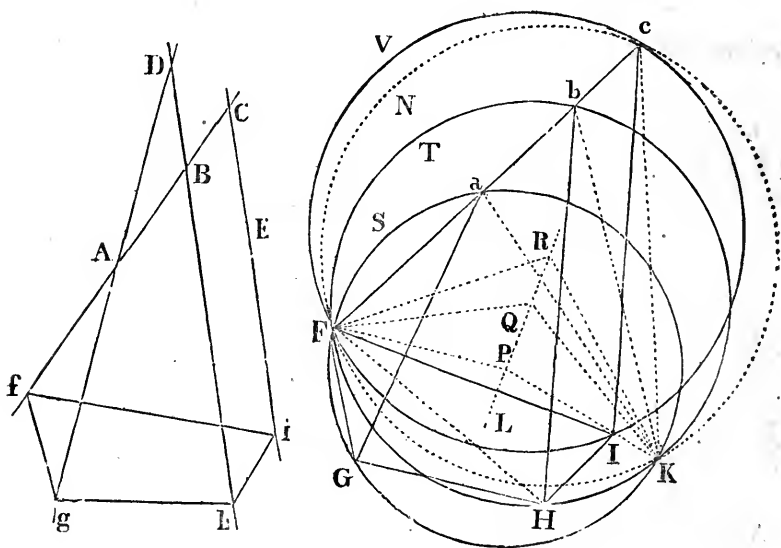
<sup>(1)</sup> \* Si enim data sit curva  $D E F$ , triangulo dato  $E F D$  circumscripta, dabitur diametrorum et axium ejusdem curvæ positio ad trianguli  $E F D$  latera, et hinc habebitur positio diametrorum et axium curvæ similis et æqualis circa triangulum  $c f d$  describendæ.

triangulum describe trajectoriam curvæ D E F similem et æqualem. Q. e. f.

### LEMMA XXVII.

*Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.*

Dentur positione rectæ quatuor A B C, A D, B D, C E; quarum prima secet secundam in A, tertiam in B, et quartam in C: et describendum sit trapezium f g h i, quod sit trapezio F G H I simile; et cujus angulus f, angulo dato F æqualis, tangat rectam A B C; cæterique anguli g, h, i,



cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas A D, B D, C E respectivè. Jungatur F H et super F G, F H, F I describantur totidem circulorum segmenta F S G, F T H, F V I; quorum primum F S G capiat angulum æqualem angulo B A D, secundum F T H capiat angulum æqualem angulo C B D, ac tertium F V I capiat angulum æqualem angulo A C E. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum F G, F H, F I, ut literarum F S G F idem sit ordo circularis qui literarum B A D B, utque literæ F T H F eodem ordine cum literis C B D C, et literæ F V I F eodem cum literis A C E A



P Q R K figuræ a b c K æquiangula et similis, et propterea a b est ad b c ut P Q ad Q R, id est, ut A B ad B C. Angulis insuper F a G, F b H, F c I æquantur f A g, f B h, f C i per constructionem. Ergo figuræ a b c F G H I figura similis A B C f g h i compleri potest. Quo facto trapezium f g h i constituetur simile trapezio F G H I, et angulis suis f, g, h, i tanget rectas A B C, A D, B D, C E. Q. e. f.

*Corol.* Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F G H, G H I usque eo, ut rectæ, F G, G H, H I in directum jaceant, et in hoc casu construendo problema ducetur recta f g h i, cujus partes f g, g h, h i, rectis quatuor positione datis A B et A D, A D et B D, B D et C E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F G, G H, H I, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

Producantur A B ad K, et B D ad L, ut sit B K ad A B ut H I ad G H; et D L ad B D ut G I ad F G; et jungatur K L occurrens rectæ C E in i. Producatur i L ad M, ut sit L M ad i L ut G H ad H I, et agatur tum M Q ipsi L B parallela, rectæque A D occurrens in g, tum g i secans A B, B D in f, h. Dico factum.

Secet enim M g rectam A B in Q, et A D rectam K L in S, et agatur A P quæ sit ipsi B D parallela et occurrat i L in P, et erunt g M ad L h (g i ad h i, <sup>(n)</sup> M i ad L i, G I ad H I, A K ad B K) et A P ad B L in eâdem ratione. Secetur D L in R ut sit D L ad R L in eâdem illâ ratione, et ob proportionales g S ad g M, A S ad A P, et D S ad D L; erit, <sup>(o)</sup> ex æquo, ut g S ad L h ita A S ad B L et D S ad R L; et mixtim, B L — R L ad L h — B L ut A S — D S ad g S — A S. Id est B R ad B h ut A D ad A g, ideoque ut B D ad g Q. Et vicissim B R ad B D ut B h ad g Q, seu f h ad f g. Sed ex constructione linea B L eâdem ratione secta fuit in D et R atque linea F I in G et H: ideoque est B R ad B D ut F H ad F G. Ergo f h est ad f g ut F H ad F G. Cum igitur sit etiam g i ad h i ut M i ad L i, id est, ut G I ad H I, patet lineas F I, f i in g et h, G et H similiter sectas esse. Q. e. f.

(<sup>n</sup>) \* Nam (per constr.) L M : i L = G H : H I = A B : B K, ac proinde componendo consequentes cum antecedentibus M i : L i = G I : H I = A K : B K = A P : B L ob parallelas.

(<sup>o</sup>) \* Quoniam enim

g M : L h = A P : B L = D L : R L  
et g S : g M = A S : A P = D S : D L

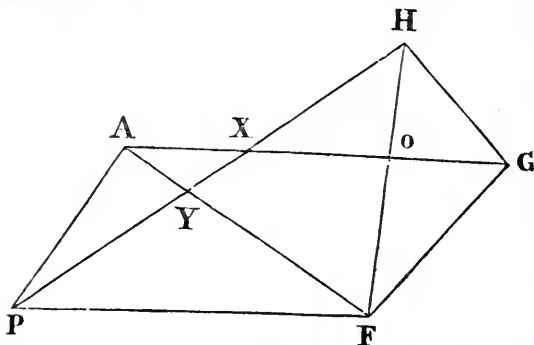
patet esse g S : L h = A S : B L = D S : R L, et consequenter g S — A S : L h — B L = A S — D S : B L — R L = g S : L h; undè invertendo permutando et alternando B L — R L : L h — B L = A S — D S : g S — A S id est B R : B h = A D : A g = B D : g Q, ob similia triangula A D B, A g Q.





Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

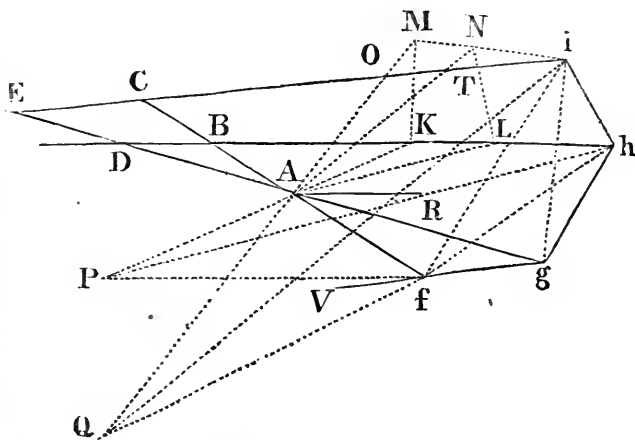
et ad angulum  $G$  recta  $AG$ , secans latus oppositum  $HF$  in  $O$ , et super rectam  $AF$ , construatur triangulum  $FAP$ , simile triangulo



$FGH$ , jungaturque  $PH$  secans  $AG$  in  $X$ , et  $AF$  in  $Y$ , similia erunt triangula  $PHF$ ,  $AGF$ , et anguli  $HXG$ ,  $HFG$  æquales; quoniam enim anguli  $AFP$ ,  $HFG$  sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli  $PFH$ ,  $AFG$ ; et quoniam duo triangula  $PFH$ ,  $HFG$ , similia sunt (per hyp.) erit  $PF : AF = HF : FG$ , adeoque triangula  $AFG$ ,  $PFH$ , quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, et hinc anguli  $HPP$ ,  $GAF$  æquantur; cumque anguli oppositi  $PYF$ ,  $AYX$ , sint etiam æquales, liquet angulum  $AXY$  sive  $HXG$ , æqualem esse angulo  $AFP = HFG$ . Q. e. d.

357. Hoc itaque, posito, demonstratur Newtoniana constructio. Trapezii  $fg hi$ , anguli quatuor tangent rectas  $Ci$ ,  $Bh$ ,  $Ag$ ,  $Af$ . Super rectâ  $Af$ , construatur triangula  $fAP$ ,  $fAQ$ , triangulis  $fg h$ ,  $fg i$ , similia; jungantur  $Ph$ ,  $Qi$ , et latera  $PA$ ,  $QA$ , producantur, ut rectis  $Bh$ ,  $Ci$ , occurrant in  $K$ , et  $O$ ; erunt anguli  $BAK$ ,  $BAO$ , æquales angulis datis  $fg h$ ,  $fg i$ ; agantur  $AL$ ,  $AT$ , rectis  $Ph$ ,  $Qi$  parallelæ, et producto latere  $g f$ , ad  $V$ , erit angulus  $DAL$ , æqualis angulo  $Vfh$ ; angulus

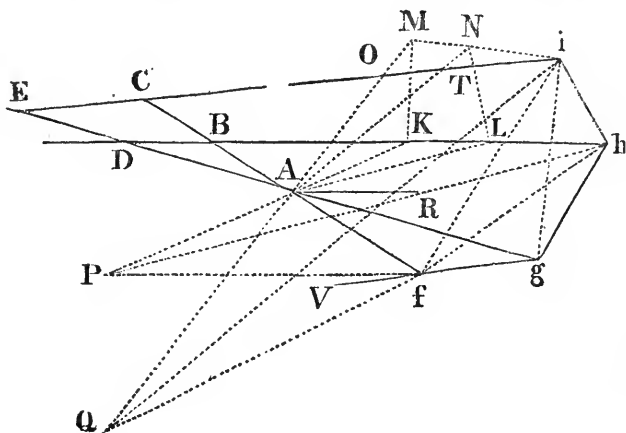
enim  $DAL = DAB + BAK + KAL = fAg + PAf + hPA$ ; sed (per constr.)  $PAf = fgh$ , et  $fPA = fhg$ ; cumque sit triangulum  $fPh$ , simile triangulo  $fAg$ , (356.) angulus  $fPh = fAg$ , adeoque  $hPA + fAg = hPA + fPh = fPA = fhg$ ; quare  $DAL = fgh + fhg = Vfh$  (per 32. 1. Elem.) Et similiter ostenditur angulum  $Vfi$ , ob triangula  $fAQ$ ,  $fQi$ , triangulis  $fg i$ ,  $fAg$ , similia. Agantur rectæ  $KM$ ,  $LN$ , quæ cum rectis  $AK$ ,  $AL$  constituent angulos  $AKM$ ,  $ALN$  angulis  $ghi$ ,  $fhi$  æquales, rectisque  $AO$ ,  $AT$  productis occurrant in  $M$  et  $N$ , et triangula  $AKM$ ,  $ALN$  similia erunt triangulis  $ghi$ ,  $fhi$ , (unde juxta constructionem Newtoni erit  $KM : AK = hi : hg$ , et  $LN : AL = hi : hf$ ). Etenim angulus  $MAK = PAQ = PAf - QAf = fgh - fgi = ig h$ , (per constr.) quare cum sit quoque (per constr.) angulus  $AKM = ghi$ , triangula  $AKM$ ,  $ghi$  sunt similia, angulus verò  $NAL = DAL - DAT = Vfh - Vfi$  (per Dem.) sed  $Vfh - Vfi = ifh$ , ergo triangula  $ifh$ ,  $NAL$  similia sunt. jungatur  $MN$ , demonstrandum est hanc lineam productam transire per angulum  $i$ , quo trapezium tangit lineam  $ECi$ , ex puncto  $A$ , ad rectam  $Ph$ , agatur  $AR$  rectæ  $Bh$ , parallela, ob similia triangula  $fg h$ ,  $fAP$  erit .....  $fg : hg = Af : PA$



ob sim. tri.  $f g i, f A Q \dots g i : f g = Q A : A f$   
 ob sim. tri.  $g h i, A K M \dots h g : g i = A K : A M$   
 ob sim. tri.  $A K L, P A R \dots A K : A L = P A : P R$   
 ob sim. tri.  $f Q i, f P h, \dots f h : f i = P h : Q i$ ;  
 sed ob sim. tri.  $f h i, A L N$ ,  
 $f h : f i = A L : A N$ .  
 ergo  $A L : A N = P h : Q i$   
 et  $A L : A N = P h - A L : Q i - A N$   
 et quia  $A L = R h$  est  $A L : A N = P R : Q i - A N$

$Q i$  seu  $Q i - A N + A N$ . Quoniam igitur  
 rectæ  $A N, Q i$ , sunt parallelæ (per constr.)  
 patet puncta  $M, N, i$ , esse in unâ rectâ, atque  
 hæc est prima pars constructionis Newtonianæ  
 quæ erat demonstranda.

2<sup>a</sup>. Illius pars facile ostenditur. Nam (vid.  
 fig. Newt.) junctâ  $P i$ , erit (per constr.) triangulum  
 $P i E$ , super rectâ  $E i$  constructum simile  
 triangulo  $f i g$ , ad cujus angulos  $i$  et  $g$ , ductæ



undè per compositionem rationum et ex æquo,  
 $A K : A N = Q A \times A K : A M \times$   
 $(Q i - A N)$  quare  $A K \times A M : A N \times$   
 $A M = Q A \times A K : A M \times Q i - A N$ ,  
 ac proinde  $A M : A N = Q A : Q i - A N$ ,  
 adeoque  $A M : A N = Q M$  seu  $Q A + A M$ ;

sunt ex puncto  $E$ , rectæ  $E i, E g$ ; quare  
 (356), si per punctum  $P$  agatur recta  $P Q$ , quæ  
 cum rectâ  $E g$ , contineat angulum  $P Q E$  æqua-  
 lem angulo  $f i g$ , recta illa  $P Q$ , producta tanget  
 angulum  $f$ , trianguli  $f i g$ , seu trapezii  $f g h i$ .  
 Q. e. d.



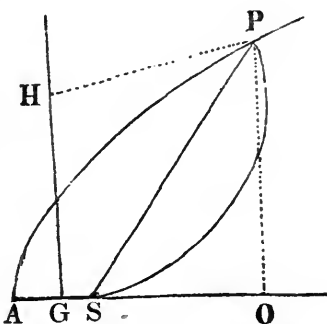
## SECTIO VI.

*De inventione motuum in orbibus datis.*

## PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

*Corporis in datâ trajectoryâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (s)*

(t) Sit S umbilicus et A vertex principalis parabolæ, sitque 4 A S × M æquale aræ parabolicæ abscindendæ A P S, quæ radio S P, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas aræ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca A S in G, erigeque perpendicularum G H æquale 3 M, et circulus centro H, intervallo



H S descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissâ ad axem perpendiculari P O et ductâ P H, (u) est  $A G q + G H q (=$   
 $(z) H P q = A O - A G : \text{quad.} + P O - G H : \text{quad.}) = A O q$   
 $+ P O q - 2 G A O - 2 G H \times P O + A G q + G H q.$  (v) Unde  
 $2 G H \times P O (= A O q + P O q - 2 G A O) = A O q + \frac{5}{4} P O q.$   
 Pro A O q scribe  $A O \times \frac{P O q}{4 A S}$ ; et applicatis terminis omnibus ad 3 P O  
 ductisque in 2 A S, fiet  $\frac{4}{3} G H \times A S (= \frac{1}{6} A O \times P O + \frac{1}{2} A S \times$   
 $P O = \frac{A O + 3 A S}{6} \times P O = \frac{4 A O - 3 S O}{6} \times P O = \text{aræ}$   
 $A P O - S P O) = \text{aræ A P S.}$  Sed G H erat 3 M, et inde  $\frac{4}{3} G H$

(\*) 338. Newtonus in hac totâ sectione supponit corpus in trajectoryâ conicâ datâ itâ moveri, ut radiis ad trajectoryâ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3<sup>o</sup> ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoryæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoryæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoryæ sectorem huic temporî correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoryâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrâ quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoryæ punctum attingit; nam cum sint aræ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, et vicissim datâ aræ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) \* Sit S umbilicus, et A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet A P S describitur.

(u) \* Est  $A G^2 + G H^2 = H P^2$ ; nam  $A G = G S$ ,  $H P = H S = H A$ , et angulus G rectus (per constr.) quare  $H A^2 = H P^2 = A G^2 + G H^2$ .

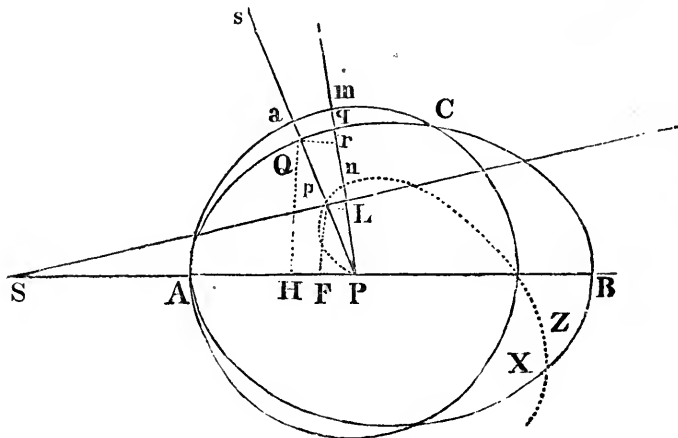
(z) \*  $H P^2 = (A O - A G)^2 + (P O - G H)^2$ . Nam ex puncto H, ad rectam P O demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi  $G O = A O - A G$ , et pars rectæ P O inter perpendicularem et punctum P intercepta æqualis erit P O - G H.

(v) \* Undè sublati utrinque quadratis A G<sup>2</sup>





lis est, ideóque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: et propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis, numero infinitis, et <sup>(c)</sup> æquatio, quâ



perpendiculara Q r, p L, et eodem tempore quo punctum a, percurrent arcum a m, punctum p percurrent rectam L n; quâpropter nascente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P s, hoc est, (per hyp.) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula similia P a m, P Q r est

$$P a : P Q = a m : Q r = \frac{P Q \times a m}{P a}, \text{ ac}$$

$$\text{proindè sectoris nascentis } P Q \text{ area } \frac{1}{2} Q r \times P Q = \frac{P Q^2 \times a m}{2 P a}.$$

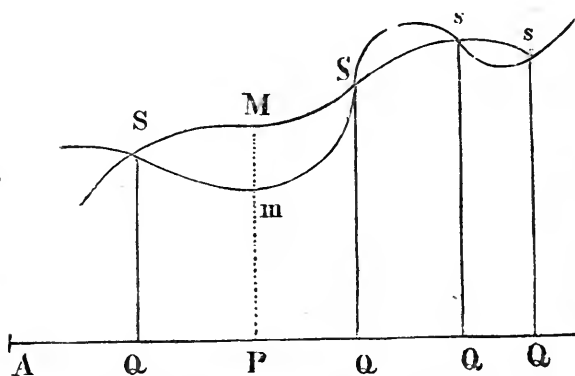
Cum igitur a m et 2 P a, sint quantitates constantes (ex hyp.) erit sector P Q q, nascens seu fluxio areæ P A Q ut P Q<sup>2</sup>, atque ideó ut nascens L n, seu ut fluxio rectæ P p, et hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (Cor. Lem. IV.) Q. e. d.

361. Puncta p et Q referantur ad rectam A B, positione datam demissis ad A B perpendicularibus Q H, p F sitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ E ex lineis variabilibus P H, Q H et aliis constantibus quomodolibet composita, et quoniam linea P p areæ P A Q seu quantitati finitæ E proportionalis est (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate E in quantitatem constantem B, eritque P p = E × B æquatio finita. Verùm ob similia triangula P F p, P H Q et angulum ad H rectum, P p : p F = P Q, seu  $\sqrt{P H^2 + Q H^2} : Q H$ , et P p : P F = P Q seu  $\sqrt{P H^2 + Q H^2} :$

P H, et præterea ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter P H et Q H, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variabiles, nimirum P p, P F, p F, P H, Q H continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles P F, p F reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, et propterea rectæ cujusvis S p positione datæ intersectio p cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ S p, S B positione datæ sint, linea S P magnitudine et triangulum S p F specie dantur, et hinc datur ratio lineæ S F seu S P ± P F ad F p, et nova invenitur æquatio inter P F et F p; per hanc igitur æquationem et per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur P F, et P p, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.

<sup>(c)</sup> 362. Lineæ duæ S M S, S m s se mutuò intersecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, et Q S, P M, P m ad eas ordinatæ; quoniam in communibus lineis S M s, S m s, intersectionibus S, s, ordinatæ P M, P m sunt æquales, si in duabus ad lineas S M s, S m s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinarum P M, P m, eadem scribatur littera, v. gr. y, et deindè ex illis æqua-

intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ intersectio altera etiam inveniat. (\*) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum et curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, et intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. (†) Id nisi necessariò



tionibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, et constantibus composita. Porro hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q, seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam, &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex et conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum S M s, S m s, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum et radicum infinita.

(†) \* Exempli causâ. Sint  $a p + p x = y y$ , et  $b x - x x = y y$ , æquationes ad parabolam et circulum, et invenietur  $x = \frac{y y - a p}{p}$ , et  $\frac{b y y - b a p}{p} - \frac{y^4 - 2 a p y y + a a p p}{p^2} = y y$ , æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possunt parabolæ et circuli intersectiones. Sint  $a p^2 + p^2 x = y^3$ , et  $b x - x x = y^2$  æquationes ad parabolam  $3^{ae}$ . po-

testatis et ad circulum, erit  $x = \frac{y^3 - a p^2}{p^2}$  et  $\frac{b y^3 - b a p^2}{p^2} - \frac{y^6 - 2 a p^2 y^3 + a^2 p^4}{p^2} = y y$  æquatio sex dimensionum quod esse possint intersectiones sex, et ita de cæteris. Generatim verò tot esse possunt curvarum duarum intersectiones quot sunt unitates in facto ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

(\*) \* Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones conicæ quarum intersectiones, seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant.

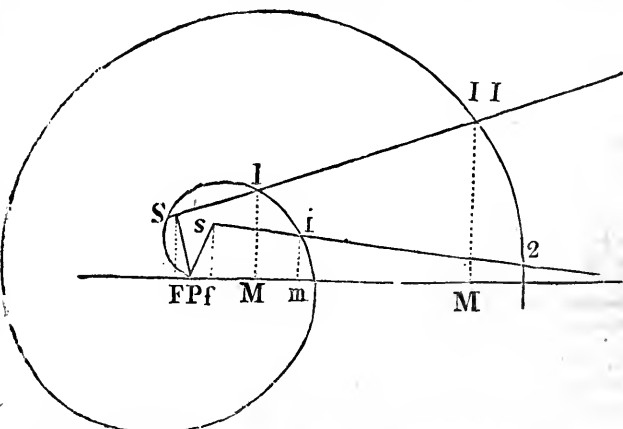
fieret, reducere liceret, problemata omnia solida ad plana, et plusquam solida, ad solida. <sup>(h)</sup> Loquor hic de curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum et sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum, ternæ rectarum et curvarum irreducibilium tertię potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum et curvarum irreducibilium quartę potestatis per æquationes dimensionum quatuor, et sic in infinitum. Ergo rectę et spiralis intersectiones numero infinitę, cum curva hæc sit simplex et in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum et radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex et idem calculus. <sup>(i)</sup> Nam si a polo in rectam illam

Quarę si hujusmodi intersectiones vel ordinatę communes generaliter possent per æquationem quadraticam inveniri, problemata solida per æquationes duarum dimensionum solvi ac construi possent, atque ita ad plana reducerentur, eademque ratione plus quam solida ad solida, indeque ad plana revocarentur.

<sup>(h)</sup> Nounquam proposita ad curvam æquatio ad inferiorem potestatem aut in duas æquationes inferioris potestatis resolvi potest. Sic æquatio  $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + ax^2y^2 + abxy - by^3 = 0$  resolvi potest in duas  $ax - ax + yy = 0$ , et  $ax - by = 0$  quarum prior est ad circulum, posterior ad parabolam. Parabolę autem et circuli cum lineā quavis intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt.

<sup>(i)</sup> \* Sit polus P, secans S I, I I, ad eam ex polo normalis P s, intersectio prima in I, secunda in I I, &c. circa polum P, revolvatur perpendicularum P S, unā cum secante S I, I I ad illud semper normali, ubi perpendicularum pervenit ad situm P' s, et secans S I, I I ad situm s i 2, intersectio prima I, percurso arcu I i, pervenit ad i, et post integram revolutionem cum s i 2, redit ad situm S I, I I, prima intersectio I, seu i, pervenit ad I I, et fit secunda, et post duas revolutiones fit tertiā et sic deinceps.

Ex punctis S, s, ad rectam P M infinitam et positione datam demittantur perpendiculara S F, s f; manente secantis S I, I I, positione, constantes sunt rectę S F, F P, S P, quibus illa positio determinatur, et demissā ex I ad P M perpendiculari I m datur æquatio aliqua inter P m vel I m et datas S P, F P, S F, quā inter-



sectio I exhibetur; ubi verò secans S I, I I, pervenit ad situm s i 2, manente secantis s i 2 positione, datur æquatio inter i m vel P m et datas s P, seu S P, P f, s f, et æquatio hæc a priori diversa non est, nisi ratione quantitatum F P F s, quę mutata sunt in f P, f s, per quas secantis s i 2, positio determinatur, cum utraque æquatio in situ S I, I I, et situ s i 2, ab æquatione ad spiralem quę eadem semper manet et ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineę f s, f P post primam revolutionem

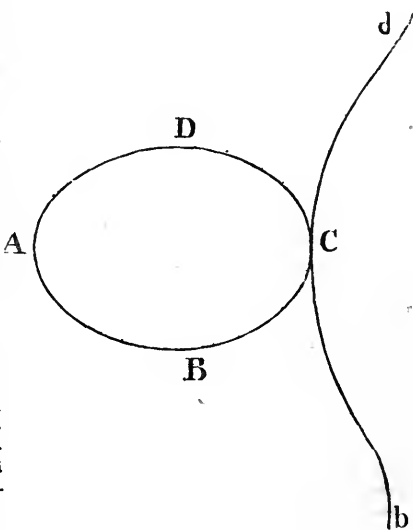
secantem demittatur perpendicularum, et perpendicularum illud unà cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, et sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, et propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ et spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, et idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(<sup>k</sup>) Eodem argumento, si intervallum poli et puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. (<sup>l</sup>) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

ac proindè post singulas redeunt ad magnitudines primas F S, F P intersectione primâ in secundam transeunte, secundâ in tertiam, et sic deinceps, æquatio inter I I M, vel P M, et datas P F, P S, S F, redibit ad formam primam quam nabeat æquatio inter I M, vel P M, et easdem datas quantitates P F, P S, S F, adeoque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes I, I I, &c. seu valores I M, I I M, &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(<sup>k</sup>) \* Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimensionum infinita, quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissa seu intervallum puncti spiralem describentis et poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

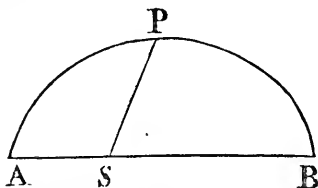
(<sup>l</sup>) \* Ovalem A B C D tangat in C curva conjugata b C d, cujus rami C b, C d in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circa punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, et abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur a figurâ conjugatâ b C d, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ intrâ ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



## Corollarium.

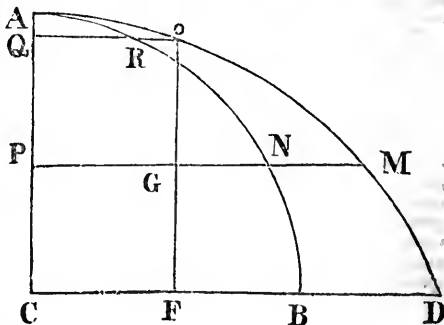
(<sup>m</sup>) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; et propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudes æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices,

(<sup>m</sup>) 563. Sit Ellipseos A P B, axis A B, umbilicus S, radius vector S P, dataque sint totius Ellipsis area et tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum A P, ita area totius ellipseos ad aream sectoris A P S, obtinebitur æquatio inter aream A P S, et tempus quo illa describitur. Unde si postea inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam A P S et radium vectorem S P ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis A P, et radium vectorem S P, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et vice versâ, si ex tempore quo arcus A P describitur, radii vecto-



ris S P longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis et superioris proportionis inter tempora et areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet A S P et radium vectorem S P ac datas quantitates, quod impossibile esse demonstratum est; et propterea longitudo (ac proinde positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris S P, per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum et abscissarum rectarum ratio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam a  $x^m + b y^n + \&c. = 0$  numerus terminorum finitus sit et exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis, contrâ si numerus terminorum infinitus fuerit, et summi nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

564. Circuli (adeoque et Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem et brevem referemus. Sit quadrans circuli C A B, et ex puncto quovis N arcûs A B demittatur ad radium A C perpendicularis N P, demonstrandum est arcus A N, et rectarum A P, P N relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva A O M D cujus hæc sit natura ut recta M P ex puncto quovis M ad radium A C perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso A N; ope curvæ A M D arcus A N in ratione quâvis datâ rectæ P G ad P M dividi potest in R; nam si per punctum G agatur recta G o, ipsi P M normalis et curvæ A M D occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad A C perpendicularis o Q arcum A N secans in R, erit A R = Q o, adeoque A R : A N = P G : P M. Verùm demonstravit Clairss. Hospitalius Art. 443. Lib. 10. Sectionum Conicarum, quod si arcus A N sit in partes æquales dividendus quarum una sit A R, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda A R, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu A N, partes æquales, atque adeo si dividendus



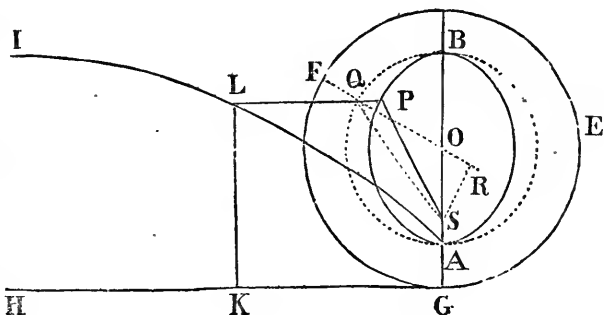


trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos temporì proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur.

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

*Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.*

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, et O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produca O A ad G, ut sit O G ad O A ut O A ad



O S. Erigè perpendicularum G H, centroque O et intervallo O G describe circulum G E F, et super regula G H, ceu fundo, progrediatur rota G E F revolvendo circa axem suum, et interea puncto suo A describendo trochoidem A L I. Quo facto, cape G K in ratione ad rotæ perimetrum G E F G, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum A P, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendicularum K L occurrens trochoidi in L, et acta L P ipsi K G parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo O A describatur semicirculus A Q B, et arcui

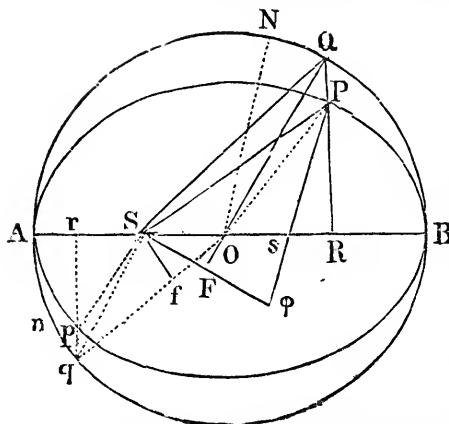
sit arcus A N in ratione indefinitâ rectæ P G ad P M, æquatio illa finita esse nequit. Ergò curva A M D, quâ arcus quilibet A N in ratione quâvis P G ad P M per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus A N et rectarum A P, P N relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ A P ad ordinatam P M, ac proinde curva A M D esset geometricè rationalis. Ergò rec-

tificatio arcus A N, æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. e. d.

365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet a quadraturâ vel rectificatione circuli et ovalium indefinitâ quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irrationales. Ex demonstratis autem minime sequitur circuli et ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

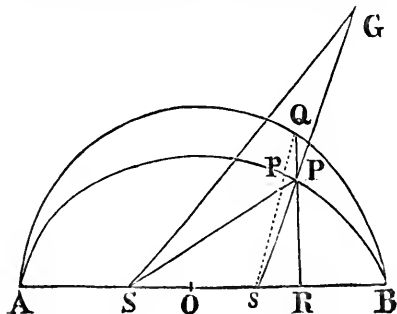






gulis  $QOB$  et  $NOQ$ , et  $QOB$  sive anomalia excentri, est æqualis angulus  $QSB$  (sive  $PSB$  neglecto  $QSP$ ) et  $SQO$ , ergo angulus  $NOB$  est æqualis angulis  $PSB$ ,  $SQO$ ,  $NOQ$  quibus etiam quam proximè æqualis est angulus  $PSB$ , nam coëuntibus focis  $S$  et  $s$  cum centro  $O$ , puncta  $Q$  et  $P$  etiam coëunt et angulus  $SPO$  angulo  $SQO$  est quam proximè æqualis; pariter ut  $QO$  proximè coincidit cum  $PO$  fingatur  $SF$  esse perpendiculararem in ipsam  $PO$ , et produci donec cum  $Ps$  producto in  $\phi$  concurrat, erunt quam proximè  $OF$ ,  $s\phi$  parallelæ, ideoque ob æquales  $SO$ ,  $Os$ , æquales erunt  $SF$  et  $F\phi$ ,  $SP$  et  $P\phi$ , ut et anguli  $SPF$  et  $FPO$  sive  $OPs$ , sed ob  $SF$  æqualem  $QN$  et  $SQ$  sive  $SP$  prope æqualem  $OQ$  est angulus  $SPO$  sive  $OPs$  prope æqualis angulo  $NOQ$ : ergo totus angulus  $SPs$  est æqualis angulis  $SQO$  et  $NOQ$  simul sumptis, et cum angulus  $PSB$  sit æqualis angulis  $PSB$  et  $SPs$ , æqualis prope erit angulis  $PSB$ ,  $SQO$ ,  $NOQ$  sicut angulus  $NOB$ , ergo angulus  $PSB$  est quam proximè anomalia media cujus anomalia coëquata est  $PSB$ .

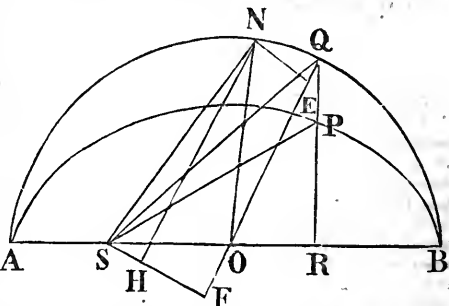
Dato autem angulo  $BsP$ , angulum  $PSB$ , ita quærit Wardus. Producatur  $sP$ ,



ad  $G$ , ut sit  $PG = PS$ , et jungatur  $SG$ , erit  $sG = SP + Ps = AB$  (ex nat. Ellips.) adeoque in triangulo  $Gss$ , datis lateribus  $Gs$ ,  $Ss$ , angulo  $SsG$  dantur anguli  $SGs$  ( $= GSP$ , ob  $SP = PG$ ) et  $Gss$ , unde cognoscetur angulus  $PSs$  sive  $PSB$  æqualis nempe differentie angulorum  $Gss$ ,  $GSP$ , quare in triangulo  $SPs$ , datis angulis duobus  $PSs$ ,  $PSs$ , angulo  $SPs$ , qui est summa angulorum  $GSP$ ,  $GSP$ , et latere  $Ss$ , invenietur latus  $SP$  seu intervallum.

Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ita corrigit Bulliadus. Per punctum  $P$  Wardi methodo determinatum agatur  $QR$  axi  $AB$  normalis, et excentricus occurrens in  $Q$ , jungaturque  $sQ$ , orbitam secans in  $p$ , erit  $p$ , locus planetæ accuratior.

Methodus Cassini. Omnibus positis (ut supra num. 369.) jungantur  $SN$ ,  $ON$  et agantur  $NH$  rectæ  $QF$  parallelæ et lineæ  $SF$  occurrens in  $H$ , et  $NE$  parallelæ  $SF$  rectæ  $QF$  occurrens in  $E$ , erit  $NE = HF$  sinus arcus  $NQ$ ; cumque sit  $SF = NQ$  (369) erit  $SH$  differentia inter arcum  $NQ$  et ipsius sinum  $NE$ ; si excentricitas  $SO$  exigua fuerit, erit fere

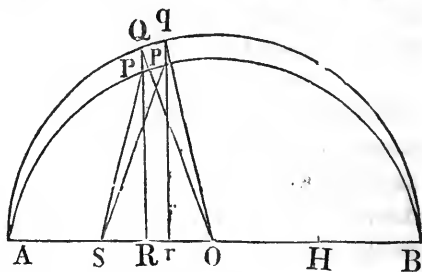


$NQ = NE = HF = SF$  et proinde  $SN$  parallelæ  $FQ$ , adeoque angulus  $SNO$ , æqualis angulo  $NOQ$ ; Porro in triangulo  $SNO$ , datis duobus lateribus  $NO$ ,  $SO$ , et angulo intercepto  $SON$  (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus  $SNO$  seu  $NOQ$ , et ipsius mensura nempe arcus  $NQ$ ; et inde innotescet anomalia excentri  $BQ$ ; Hinc in triangulo  $SQO$ , datis lateribus  $SO$ ,  $OQ$  et angulo  $SQO$ , invenietur angulus  $QSO$ , et sumptâ  $SR$  pro sinu toto, erit  $QR$  ad  $PR$  seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati  $QSB$  ad tangentem anguli ad solem  $PSB$ , qui ita obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii et Martis quarum major est excentricitas ita invenitur arcus  $NQ$ . Ex datis in triangulo  $SNO$ , lateribus  $SO$ ,  $NO$ , et angulo  $SON$ , inveniantur latus  $SN$ , et angulus  $SNO$ ; deinde quæritur in partibus decimalibus radii  $ON$  differentia



inus vero ejus loco p. Demissâque ad axem ellipseos ordinatim applicatâ P R, ex proportione diametrorum ellipseos, dabitur circuli circumscripti A Q B ordinatim applicata R Q, quæ sinus est anguli A O Q existente A O radio, quæque ellipsin secatur in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus temporis proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus, quo corpus descripsit arcum A p, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur et angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli A O Q ad radium, et angulus E ad angulum N — A O Q + D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli A O Q diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli



adeoque  $OF = \frac{SO \times \cos. A Q}{R}$ . Crescentibus

A N, A Q, Q R, decrescit R O, et evanescit ubi A Q est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi A Q quadrante major est. Quare cum sit  $+ O Q : + S O = R O : O F$ , O F idem signum + vel — habere debet cum R O, adeoque si angulus A O Q, seu arcus A Q est quadrante minor, O F est quantitas affirmativa; si A Q quadrans est, O F evanescit; si A Q est quadrante major, O F fit negativa. Est igitur  $OQ - \frac{SO \times \cos. A Q}{R} : OQ = QM :$

$$Q q, \text{ seu ob } QO = \frac{SO \times L}{R},$$

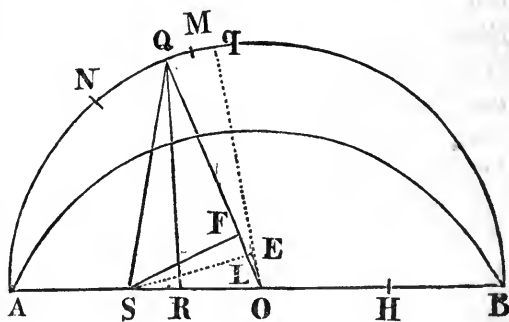
$$\text{est } \frac{SO \times L - SO \times \cos. A Q}{R} :$$

$$\frac{SO \times L}{R}, \text{ sive } L - \cos. A Q :$$

$L = QM : Q q$ , si fuerit A Q minor quadrante, et  $L + \cos. A Q : L = QM : Q q$ , si fuerit A Q major quadrante. Est autem arcus  $QM = AN - A Q + NM = N - A Q + D$ , quare si arcus  $Q q$ , dicatur E, erit  $E : N - A Q + D = L : L \mp \cos. A Q$  et A Q

+ E, erit aequalis A q; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco A Q capiatur arcus accuratior A q, seu angulus A O Q + E, et instituaturs processus priori similis, ca-

piendo arcum F, ad arcum B, ut est sinus arcus A Q + E seu A q ad radium, et arcum G ad arcum N — A q + F, seu  $N - A Q - E + F$ , ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli A O q seu A O Q + E diminutam ubi angulus A O q recto minor est, auctam ubi major, erit A Q + E + G, seu A q + G, arcus magis verus, et similiter si loco arcus A q, usurpetur arcus A q + G et item repetatur processus, inveniatur novus ar-

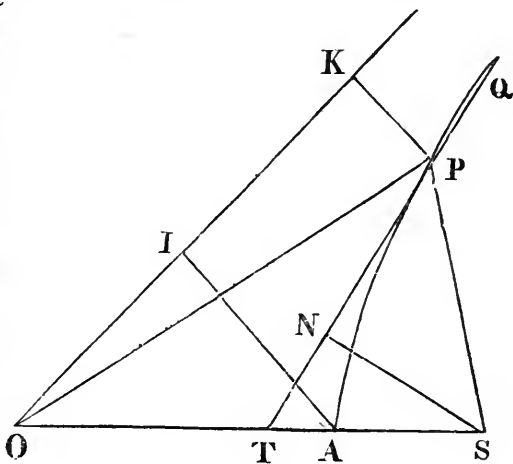


cus A Q + E + G + I, seu A q + G + I, accuratior arcu A q + G, et sic pergere licet in infinitum et quantumvis proximè ad veritatem accedere.

$A O Q + E$  ad radium, tum angulus  $G$  ad angulum  $N - A O Q - E + F$  ut est longitudo  $L$  ad longitudinem eandem cosinu anguli  $A O Q + E$  diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus  $H$  ad angulum  $B$ , ut est sinus anguli  $A O Q + E + G$  ad radium; et angulus  $I$  ad angulum  $N - A O Q - E - G + H$ , ut est longitudo  $L$  ad eandem longitudinem cosinu anguli  $A O Q + E + G$  diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus  $A O q$  æqualis angulo  $A O Q + E + G + I + \&c.$  Et <sup>(s)</sup> ex cosinu ejus  $O r$  et ordinata  $p r$ , quæ est ad sinum ejus  $q r$  ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus  $p$ . <sup>(t)</sup> Si quando angulus  $N - A O Q + D$  negativus est, debet signum  $+$  ipsius  $E$  ubique mutari in  $-$ , et signum  $-$  in  $+$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  et  $I$ , ubi anguli  $N - A O Q - E + F$ , et  $N - A O Q - E - G + H$  negativi prodeunt. Convergunt autem series infinita  $A O Q + E + G + I + \&c.$  quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum  $E$ . Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area  $A P S$  sit ut differentia inter arcum  $AQ$

et rectam ab umbilico  $S$  in radium  $O Q$  perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum  $O$ , vertex  $A$ , umbilicus  $S$  et asymptotos  $O K$ . Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ temporis proportionalis. Sit ea  $A$ , et fiat conjectura de positione rectæ  $SP$ , quæ aream  $A P S$



(<sup>s</sup>) \* Ex cosinu  $O r$ . Est enim radius ad cosinum anguli inventi  $A O q$ , ut  $q O$  ad  $O r$ , invenientur ergo punctum  $r$ , et ordinata  $q r$ . Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ita  $q r$  ad  $p r$ , habebitur locus corporis  $p$ .

(<sup>t</sup>) \* Si quando angulus  $N - A Q + D$ , seu arcus  $Q M$ , (vid. fig. Not.) negativus est, seu si punctum  $M$ , cadit infra punctum  $Q$ ,

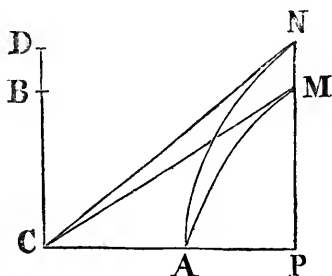
debet signum ipsius  $+$   $E$ , ubique mutari in  $-$ , et signum  $-$  in  $+$ . Quoniam enim supra invenimus  $E : N - A Q + D = L : L + \cos. A Q$ , si fuerit arcus  $N - A Q + D$ , negativus, debet quoque arcus  $E$  esse negativus, et arcus  $A q$  erit  $A Q - E$ . Idem intelligendum est de signis ipsorum  $G$  et  $I$ , &c. ob eandem rationem.

abscindat veræ proximam. Jungatur O P, et ab A et P ad asymptotum agantur A I, P K asymptoto alteri parallelæ, et <sup>(3)</sup> per tabulam loga-

<sup>(3)</sup> 374. Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam et aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare et ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

*Lemma.* Sint duæ hyperbolæ A M, A N quarum centrum C, semidiameter communis A C, semidiametri conjugatæ C B, C D, per punctum quodvis P agatur P M N ordinatim ad diametrum C P applicata, hyperbolis occurrens in punctis M et N, junganturque C M, C N spatia hyperbolica A M P, A N P et sectores A M C, A N C sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum C B, C D, vel etiam ordinarum P M, P N. Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.)  $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ , et  $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$ , undè  $PM^2 :$

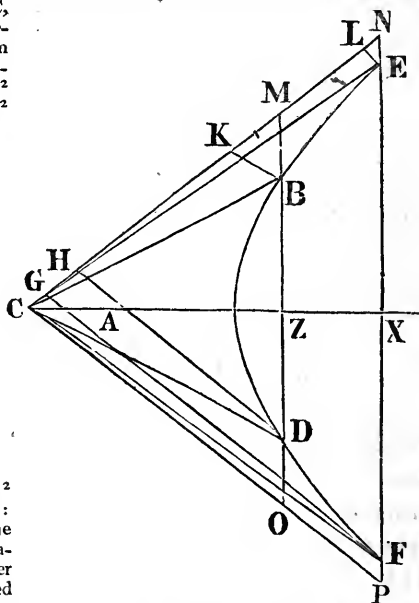
perbolici C B E, C D F erunt æquales. Agantur enim rectæ B D, E F asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, et ob parallelas K B, H D, C O erit  $MB : MK = DO : CH$ , et ob parallelas L E, G F, C P erit etiam  $NE : NL = FP : CG$ ; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 87.)  $MB = DO$ , et  $NE = FP$ , undè  $MK = CH$  et  $NL = CG$ ; Porro  $CG : CH = CK : CL$  (per hyp.) hoc est,  $NL : MK = CK : CL = LE : KB$ , ex naturâ hyperbolæ intrâ asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) rectæ igitur N E, M B, hoc est, E F,



$CB^2 = PN^2 : CD^2$ , et  $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$ , ac  $PM : PN = CB : CD$ , cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata P M N, liquet spatia hyperbolica A M P, A N P esse inter se ut CB ad CD, vel P M ad P N, sed triangula C P M, C P N sunt ad invicem ut P M ad P N vel C B ad C D; ergò  $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$ . Q. e. d.

375. *Corol.* Si duæ semidiametri conjugatæ C A, C D fuerint æquales, hyperbola A N erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum A N P vel A N C in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum A M P vel A M C in aliis quibuscumque hyperbolis.

376. *Lemma.* Si super hyperbolæ E B D F asymptoto C N sumantur quatuor partes C G, C H, C K, C L, ut sit  $CG : CH = CK : CL$ ; ducantur autem rectæ G F, H D, K B, L E alteri asymptoto C P parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in punctis E, D, B, E, junganturque semidiametri C F, C D, C B, C E, sectores hy-



B D erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 90.) unde facile deducitur trapezia M X Z N, O X Z P fore æqualia ut et aræ mixtilineæ B X Z E, D X Z F, unde singulis ex correspondenti trapezio substractis relinquentur aræ M B E N et O D F P æquales, quibus addantur Triangula M B C, O D C, æqualia ob bases æquales M B, O D in eadem lineâ positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales aræ C M N E B C, C O P F D C, ex quibus denique substractis Triangulis N E C, P F C quæ æqualia sunt ob bases æquales N E, P F in eadem lineâ positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici C B E, C D F inter se æquales. Q. e. d.



377. *Lemma.* Si per puncta quævis asymptoti C L, agantur duæ rectæ G F, H D alteri asymptoto C P parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in F et D, junganturque semidiametri C F, C D, trapezium hyperbolicum G F D H æquatur sectori C F D. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula C H D, C G F, æquantur ob æquales angulos G et H et latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 91.) adeoque sublato communi triangulo C G A, residua spatia G A D H, C A F erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum D A F, summæ G F D H, C F D erunt æquales. Q. e. d.

378. *Corol. 1.* Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica G F D H, K B E L sunt æqualia.

379. *Corol. 2.* Si asymptoti partes C G, C H, C K fuerint continuè proportionales, duo sectores C F D, C D B et duo trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, æquantur. Eadem enim ratione quâ num. 376. ostendetur rectam B F tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Undè si super asymptoto C L sumantur partes quotcumque C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ, et ex punctis G, H, K, L, &c. agantur rectæ G F, H D, K B, L E, &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L erunt æqualia; et vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ.

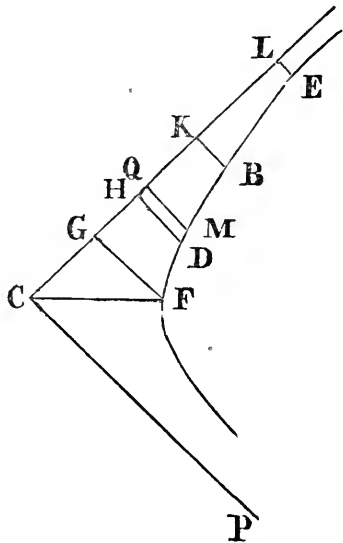
380. *Corol. 3.* Sit hyperbola F D B E æquilatera, cujus centrum C, asymptotus C L, semiaxis transversus C F, capiantur in asymptoto partes C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressionem geometricâ, aganturque G F, H D, K B, L E, &c. alteri asymptoto C P parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L, &c. erunt æqualia; quare eorum summæ, scilicet o, G F D H, G F B K, G F E L, &c. erunt in continuâ progressionem arithmeticâ. Si itaque C G sit unitas, C H, C K, C L, &c. numeri, erunt o, G F D H, G F B K, G F E L, illorum numerorum logarithmi.

381. *Corol. 4.* Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis G F D H, B G F K, &c. arcæ; Sumptâ enim C G pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum C H, C K, &c. et horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica G F D H, G F B K, &c.

382. *Corol. 5.* Sit C G = 1, G H = x, C H =  $1 + x$ , H D = y, et erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos  $1 + x \times y = 1$ , adeoque  $y = \frac{1}{1 + x}$ , et trapezii G F D H elementum

D H Q M seu  $y dx = \frac{dx}{1 + x}$ ; si igitur L.  $1 + x$ , denotet logarithmum numeri  $1 + x$ , erit L.  $(1 + x) = G F D H$ , et elementum logarithmi

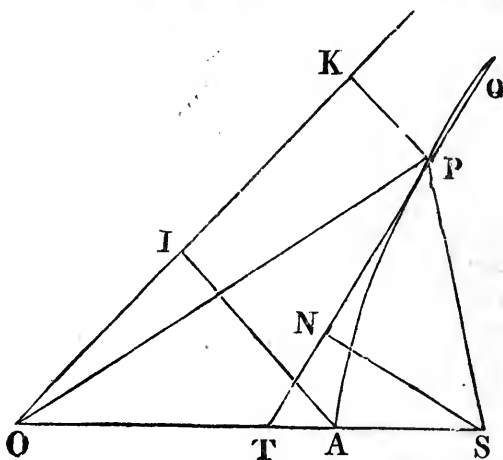
seu d. L.  $\frac{1}{1 + x} = y dx = \frac{dx}{1 + x}$ . Et similitet elementum logarithmi numeri cujusvis z seu d. L.  $z = \frac{dz}{z}$ .



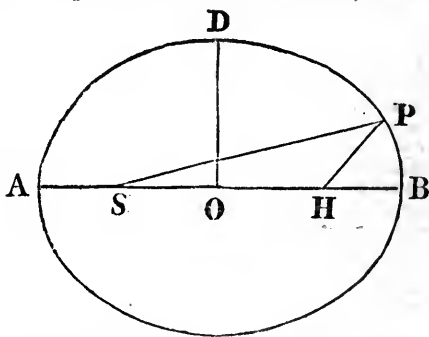
383. *Corol. 6.* Cum sit  $y = \frac{1}{1 + x}$ , si peragatur divisio, erit  $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ , &c. in infinitum, ac proinde  $y dx = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx$ , &c. in infinitum, et sumptis utrinque fluentibus S.  $y dx = G F H D = L. \frac{1}{1 + x} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5$ , &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu  $1 - x$ , eodem modo invenietur ipsius logarithmus S.  $-y dx = L. 1 - x = -x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5$ , &c.

384. *Scholium.* Observandum est logarithmos hyperbolicos. Neperi a logarithmis Briggsii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici sint semper ad Briggsianos seu vulgares in eadem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggsianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggsianum, facile est hyperbolicos ad Briggsianos, et contra Briggsianos ad hyperbolicos reducere, adeoque hyperbolicarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585, &c., quotiens 0. 4342948, &c. per logarithmum quemvis hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, et vice-

rithmorum dabitur area  $A I K P$ ,<sup>(b)</sup> eique æqualis area  $OPA$ , quæ subducta de triangulo  $OPS$  relinquet aream abscissam  $APS$ . Applicando areæ abscindendæ  $A$  et abscissæ  $APS$  differentiam duplam  $2 APS - 2 A$  vel  $2 A - 2 APS$  ad lineam  $SN$ , quæ ab umbilico  $S$  in tangentem  $TP$  perpendicularis est, <sup>(c)</sup> orietur longitudo chordæ  $PQ$ . Inscribatur autem chorda illa  $PQ$  inter  $A$  et  $P$ , si area abscissa  $APS$  major sit areâ abscindendâ  $A$ , secus ad puncti  $P$  contrarias partes; et punctum  $Q$  erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est, calculus particularis qui sequitur. Existentibus  $AO$ ,  $OB$ ,  $OD$  semiaxibus ellipseos, et  $L$  ipsius latere recto, ac  $D$  differentia inter semiaxem minorem  $OD$  et lateris recti semissem  $\frac{1}{2} L$ ; quære tum angulum  $Y$ , cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa  $D$ , et semisumma axium  $AO + OD$  ad quadratum axis majoris  $AB$ ; tum angulum  $Z$ , cujus sinus sit ad radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia  $SH$  et differentia illâ  $D$  ad triplum quadratum semiaxis majoris  $AO$ . His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps,



versâ, si logarithmus quilibet vulgaris per  $0.43429481$  et dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

\* *Et per tabulam.* (381. 384).

\* <sup>(b)</sup> *Eique æqualis area OPA* (377).

\* <sup>(c)</sup> *Orietur longitudo.* Nam cum arcus  $PQ$  exiguus sit, accipi potest pro chordâ  $PQ$  seu parte  $PQ$  tangentis  $TP$  productæ; undè triangulum rectilineum  $SQP$ , quam proximè

æquatur differentiæ spatorum hyperbolicorum  $APS$ ,  $ASQ$  seu  $A$ ; sed triangulum rectilineum  $SQP = \frac{PQ \times SN}{2}$ , ergò  $\frac{PQ \times SN}{2}$

$= A - APS$ , vel  $= APS - A$ , ac proinde

$PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$  vel  $= \frac{2APS - 2A}{SN}$ ,

prout area  $A$  major vel minor est areâ  $APS$ .

ceps determinabitur. Sume angulum  $T$  proportionalem temporis quo arcus  $B P$  descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; et angulum  $V$ , primam medii motus æquationem, ad angulum  $Y$ , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli  $T$  ad radium; atque angulum  $X$ , æquationem secundam, ad angulum  $Z$ , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli  $T$  ad cubum radii. Angulorum  $T, V, X$  vel summæ  $T + X + V$ , si angulus  $T$  recto minor est, vel differentiæ  $T + X - V$ , si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum  $B H P$ , motum medium æquatum; et si  $H P$  occurrat ellipsi in  $P$ , actâ  $S P$  abscindet aream  $B S P$  temporis proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum  $V$  et  $X$ , in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed et satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati  $B H P$ , angulus veri motus  $B S P$  et distantia  $S P$  in promptu sunt per methodum notissimam. <sup>(4)</sup>

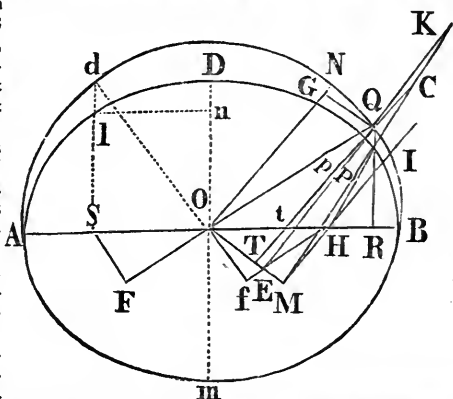
Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, et quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

(\*) 385. Ellipseos quam planeta describit sit centrum O, umbilici S, H, et semiaxes O B, O D; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum mediù motùs planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea H I, quæ cum lineâ apsidum O B, constituat angulum I H B anomaliam mediæ æqualem, recta illa H I, ferè transitit per locum planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, transeat autem H P, per locum verum planetæ P et erit angulus P H I, anomaliam mediæ I H B, addendus (vel detrahendus) ut motus mediæ æquatus B H P habeatur, et angulus P H I aut ipsi æquipollens dicetur æquatio tota mediù motus, quàm in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem et alteram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, et rationem maximæ æquationis ad alium in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes methodos illustrarunt demonstrationibus et exemplis Keillius et Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, et aperire quibus fundamentis nitatur hæc approxinatio.

386. Producatur  $IH$  in  $M$  donec occurrat perpendicularo  $OM$ , a centro  $O$  in ipsam  $IH$  demisso jungaturque  $MP$ , erit angulus  $PHI$  æqualis angulis  $PMH$  et  $MPI$ ; quorum sinus erunt inter se sicut  $PH$  ad  $MH$ ; sed cum

M H sit semper minor O H distantia centri a focc, sitque P H distantia foci H ad punctum P ellipseos, exigua est M H respectu H P, ideóque minimus est angulus M P H respectu anguli



PMH, illum itaque negligit, et hunc solum PMH  
ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ducto vero ut superius expositum est, circulo  $BQN A$  super magnum axem ellipseos  $AB$ , et ex  $P$  loco planetæ ductâ  $PR$  perpendiculari in eum magnum axem eâque  $PR$  productâ, donec secet circulum  $BQN A$  in  $Q$ ; ducatur  $TQ$  perpendicularis in  $OM$  (ideoque pa-



$$= \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times \cos. T}{OB^3}$$

multiplica ergo valores K M et M E per  $\frac{2 \sin. T \times OD}{QR}$  critque K M ad M E sive radius ad sinum anguli K ut  $4 OB^2$  (sive  $AB^2$ ) ad

$$2OD \times OB + OD \times OB - OD \times \sin. T \times \cos. T$$

et cum sit semi latus rectum  $\frac{1}{2} L = \frac{OD^2}{OB^2}$ , erit

$$OD - \frac{1}{2} L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times$$

$OB - OD$ , vocetur D ea differentia semiaxis minoris et semilateris recti, et substituto D loco  $\frac{OD}{OB} \times OB - OD$  erit Radius ad sinum anguli K ut  $A B^2$  ad  $D \times OB + OD \times 2 \cos. T \times \sin. T$ .

387. Ergo in quovis gradu anomalie mediae erit, est semper Radius ad  $A B^2$  ut sinus anguli K, ad  $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2 \cos. T \times \sin. T}{OB}$

cum verò ratio Radii ad  $A B^2$  sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus anguli K ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit t, ut  $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2 \cos. T \times \sin. T}{OB^2}$

ad  $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2 \cos. t \times \sin. t}{OB^2}$

sive multiplicando utrumque terminum per constantes  $\frac{OB}{D \times OB + OD}$  ut  $\frac{2 \cos. T \times \sin. T}{OB}$

ad  $\frac{2 \cos. t \times \sin. t}{OB}$  sed constat ex Trigonometricis, quod duplum facti sinus anguli dati cujusvis per ejus Cosinum, divisum per radium, est æquale sinui Anguli qui est duplus ejus anguli dati, ergo sinus angulorum K in diversis anomalie mediae gradibus sunt inter se ut sinus dupli anguli anomalie. Unde sequitur, quod cum duplum anomalie mediae 45. graduum sit 90. ejusque sinus sit æqualis Radio seu sinui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, sive est illic anomalie mediae æquatio prima maxima, et si ea data sit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad sinum dupli anomalie mediae ita sinus æquationis maximæ primæ ad sinum æquationis quæsitæ, sive (quia hic de minimis angulis agitur qui sunt inter se ut sui sinus) ita ipsa æquatio maxima ad æquationem quæsitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim sit Radius ad  $A B^2$  ut sinus K ad  $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \sin. 2 T$

si T sit 45°, sin. 2 T est ipse Radius OB; Est ergo Radius ad  $A B^2$  ut sinus K ad  $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times OB$  sive, ut statuit

Newtonus, est Radius ad sinum æquationis

primæ maximæ ut  $A B^2$  ad  $D \times OB + OD$ . Quod erat 1°. Dem.

388. Secunda æquatio T Q E continetur lineis ductis a puncto Q circuli B Q N A ad puncta T et E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus mediû ducitur, est vero OT æqualis sinui arcus QN = SF = Of, et si ex f ducatur ad focum linea f H, intersectio ejus lineæ f H (productæ si necesse sit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hac ergo æquationis parte est Q E radius, T E sinus, eorumque ratio est investiganda, est verò Q E paulo major quam Q T et Q T est æqualis O G, quâ paulò major est ON sive OB unde Q E pro OB commodè assumi potest, quamvis eâ sit paulo minor; Ut autem valor lineæ T E assignetur, notandum est quod cum sit OM in ON perpendicularis, et Of in OQ, est angulus f O M æqualis angulo N O Q.

Cognoscetur ergo arcus mensurans angulum f O M sive f O E, assumpto Of pro radio, dicendo radius ON sive OB ad arcum NQ ut Of (sive NQ) ad arcum mensurantem angulum f O E qui ideo erit  $\frac{NQ^2}{OB}$ , secans illius

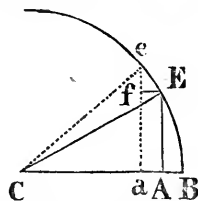
arcus est O E, cum verò T O sit sinus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of secundum lineam OM, cadet tantum ultra T quantum arcus NQ suum sinum excedit, et tantum citra E quantum radius ille Of a secante anguli

cujus arcus est  $\frac{NQ^2}{OB}$  deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatu ejus excessus super ejus sinum,

et dato arcu  $\frac{NQ^2}{OB}$  inveniatu excessus ejus secantis super radium NQ sive Of et inventis his duobus habebitur linea T E quæsita.

Lemma I. Dato arcu invenire ejus sinum. Sit radius C B, r, sinus quæsitus E A, x, ejus Cosinus C A,  $\sqrt{r^2 - x^2}$ , arcus datus B E, v, ejus fluxio E e sit dv.

Ducto radio C E, et radio proximo C e et sinu arcus B e, ductoque ex E in F perpendiculari, erit e f fluxio sinus quæsitæ sive dx. Triangula verò E C A, e f E, pro similibus sunt habenda, nam angulus f E A est rectus ut et



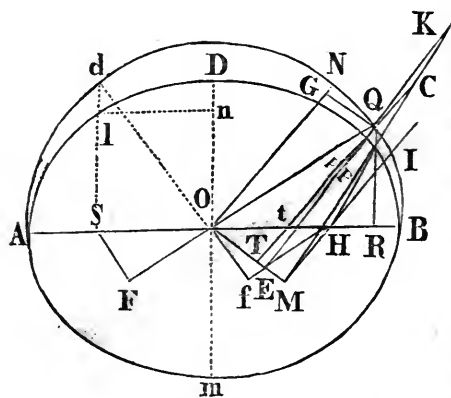
angulus C E e et quia circulus est perpendicularis in radium, et dempto communi C E f remanent C E A et f E e æquales, et ob rectos in f et A, angulus tertius f e E æqualis erit tertio B C A unde habetur hæc proportio, C A ad C E ut



convergit si modo arcus  $v$  sit exiguus, ut isto in casu.

His positis, inveniuntur commodè partes  
lineæ T E, sive sinus secundæ æquationis, ea  
enim constat ex differentia inter arcum N Q et  
ejus sinum (dato radio O B) et ex differentia  
inter eum ipsum arcum N Q sumptum ut radium  
in angulo f O E et illius anguli secantem.

Finitum ergo differentia inter arcum  $NQ$  et  
 ejus sinum, ex primâ serie invenitur, sit enim  $v$   
 $= NQ$  et  $r = OB$ , sinus arcus  $NQ$  per eam  
 seriem invenitur  $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 5 OB^2}$  &c. et  
 omissis reliquis terminis seriei, hic admodum  
 exiguis, liquet differentiam inter arcum  $NQ$  et  
 ejus sinum esse terminum  $\frac{NQ^3}{2 \times 5 OB^2}$  qui  
 erat in eâ serie ex arcu  $NQ$  tollendus ut obtine-  
 retur sinus.



Secundo, ut differentia inter radium et secantem anguli  $f O E$  obtineatur, loco radii  $r$  in serie superior inventa valor radii  $O f$  sive  $N Q$  est substituendus, et loco arcus  $v$ , valor arcus qui mensurat eum angulum et qui inventus fuit  $= \frac{N Q^2}{O B}$ , ergo series quæ secantem exprimit

in hanc abit  $NQ + \frac{NQ^4}{2OB^2 \times NQ}$ , &c. reliquis terminis ut pote minimis omissis, excessus secantis super radium est  $\frac{NQ^3}{2OB^2}$ , qui junctus cum excessu arcus super sinum superius invento  $\frac{NQ^3}{2 \times 5OB^2}$  efficit summam  $\frac{4NQ^3}{2 \times 3OB^2}$  sive  $\frac{2NQ^3}{3OB^2}$  pro valore sinus æquationis secundæ; sed est (369) ut Radius  $OB$  ad  $QR$  ita  $SH$  sive  $OH$  ad  $SF$  sive  $NQ$ , ergo  $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$  et  $\frac{2NQ^3}{3OB^2} = TE = \frac{2OH^3}{5OB^2}$

$\times Q R^3$ ; Itaque cum in hac secundâ æqua-  
 tione radius  $Q E$  sit in omni anomalie gradu  
 idem aut prope idem, et anguli sint minimi  
 erunt inter se quam proximè ut eorum sinus  
 $T E$ , cumque in valore  $T E$  quantitas  
 $\frac{2 O H^3}{Q R^3}$  sit constans, sinus illi sunt in ter se ut

In nonagesimo verò gradu anomalie  
 mediae linea O M sive O E in axem O B  
 cadit et Q T cui ferè æqualis est Q E  
 coincidit cum Q R, unde Q E pro Q R  
 sumi potest, et præterea Q R nonnihil  
 excedit lineam S d sive axem minorem, D O,  
 cum non nihil citra focum cadat, minor tamen  
 est radio O B, unde Q R<sup>2</sup> pro O B × O D  
 satis accurate sumi potest, sicque valor T E =  

$$\frac{2 D \times S H}{5 O B^3 \times O D} Q R^3$$
 in hanc abit T E  

$$= \frac{2 D \times S H}{5 O B^2} Q E,$$
 sed Radius est ad sinum.  
 æquationis maximæ secundæ ut Q E ad T E  
 (sive  $\frac{2 D \times S H}{5 O B^2} \times Q E$ ) et Q E ad  $\frac{2 D \times S H}{3 O B^2}$   
 Q E sicut 3 O B<sup>2</sup>, ad 2 D × S H, ergo æquatio  
 secunda maxima invenietur dicendo ut triplum  
 Quadrati semi-axis majoris ad duplum rectan-  
 gulum sub umbilicorum distantia S H et diffe-  
 rentia D semi-axis minoris et semi-lateris recti,  
 ita radius ad sinum secundæ æquationis ubi  
 est maxima, et ea data reliquæ invenientur  
 dicendo ut cubus radii ad cubum sinus anoma-  
 liæ mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio,  
 ad quæsitam. Q e. d.

389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu





æqualis logarithmo sinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 100. 39". Inventis jam æquationibus maximis  $Y + Z$ , anguli V, et X, pro quolibet anomalie mediae gradu facillè reperiuntur v. gr. pro  $45^\circ$ .

Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.

Log. cubi sinûs  $45^\circ$ . = 29. 5484550.

horum summa = 31. 5501403. 46.

Ex hac summa detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus sinûs anguli X, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 35. 41". Quare cum in  $45^\circ$ . anomalie gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus P H B, =  $45^\circ$ , 4', 56. 55".

Jam verò ut inveniatnr anomalia vera, seu angulus P S B, dato angulo P H B, producatnr H P ad Q ut sit P Q = S P, et erit H Q = A B, ex natura ellipseos, atque angulus P H B, æqualis summæ angulorum Q S H, S Q H; quare semisumma laterum S H, H Q, est ad eorum semidifferentiam, hoc est, A O + S O, ad A O - S O, ut tangens dimidiû anguli P H B, ad tangentem semidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang.  $\frac{1}{2}$  P H B = 9. 6181066. 717.

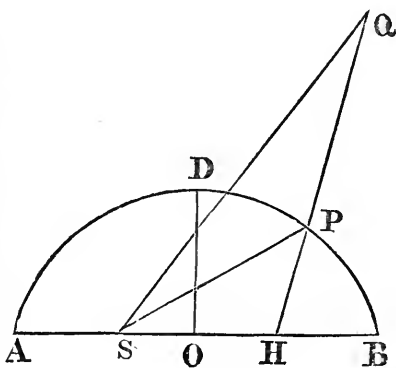
Log. A O - S O = 3. 1407247. 98.

horum summa = 12. 7588314. 698.

Log. A O + S O = 3. 2212068. 41.

Differentia = 9 5376246. 246.

= Log. tang. Ang.  $\frac{1}{2}$  Q S H -  $\frac{1}{2}$  S Q H. Undè invenitur  $\frac{1}{2}$  Q S H -  $\frac{1}{2}$  S Q H =  $19^\circ$ . 1', 35. 5"; et hinc anomalia vera = Q S H - S Q H (sive - Q S P) =  $38^\circ$ . 3' 11", quam



proximè; Nam si ex datâ hac anomalâ verâ, quæratnr (371) anomalia media, invenietur esse  $45^\circ$ , graduum quam proximè.

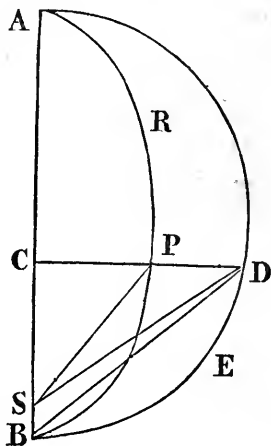
## SECTIO VII.

*De corporum ascensu et descensu rectilineo.*

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

*Posito quodvis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum a centro, spatia definire quæ corpus rectâ cadendo datis temporibus describit.*

*Cas. 1.* Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Corol. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica  $A R P B$  et umbilicus ejus  $S$ . Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore  $A B$  describatur semicirculus  $A D B$ , et per corpus decedens transeat recta  $D P C$  perpendicularis ad axem; actisque  $D S$ ,  $P S$  erit area  $A S D$  areae  $A S P$ , atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe  $A B$  minuatur perpetuo latitudo ellipseos, et semper manebit area  $A S D$  tempori proportionalis. (c) Minuatur latitudo illa in infinitum: et orbe  $A P B$  jam coincidente cum axe  $A B$  et umbilico  $S$  cum axis termino  $B$ , descendet corpus in rectâ  $A C$ , et area  $A B D$  evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium  $A C$ , quod corpus de

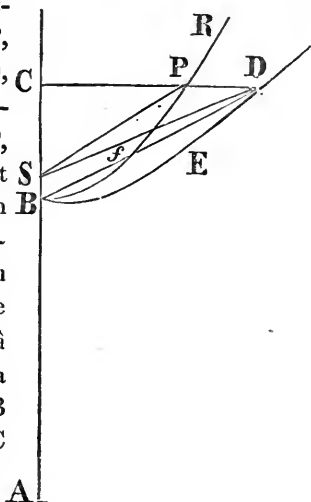


(\*) 391. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuo minuatur, et tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuo minuuntur et tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe et umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso; adeoque et abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuo minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeoque et ordinata ipsa perpetuo minuitur et tandem evanescit, et peri-

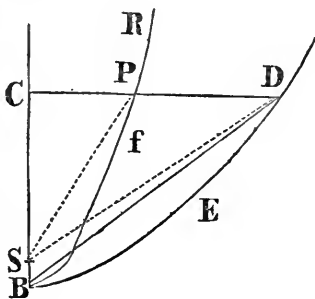
meter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porro ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateris recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola et de Ellipsi et Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeoque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantis umbilici a verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti et axe transverso æquatur rectangulo ex distantis umbilici a verticibus; quare evanescente latere recto et manente axe transverso, rectangulum sub distantis umbilici a verticibus nullum fit, et umbilicus cum proximo vertice coincidit.

loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempore proportionalis capiatur area A B D, et a puncto D ad rectam A B demittatur perpendicularis D C (f). Q. e. i.

Cas. 2. Si figura illa R P B hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem A B hyperbola rectangula B E D: et (g) quoniam areae C S P, C B f P, S P f B sunt ad areas C S D, C B E D, S D E B, singulae ad singulas, in datâ ratione altitudinum C P, C D; et area S P f B proportionalis est tempore quo corpus P movebitur per arcum P f B; erit etiam area S D E B eidem tempore proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolae R P B in infinitum manente latere transverso, et coibit arcus P B cum rectâ C B et umbilicus S cum vertice B et recta S D cum rectâ B D. Proinde area B D E B proportionalis erit tempore quo corpus C recto descensu describit lineam C B. Q. e. i.



Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura R P B parabola est, et eodem vertice principali B describatur alia parabola B E D, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto et in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ C B; fiet segmentum parabolicum B D E B proportionale tempore quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B. Q. e. i.



(f) 392. Perpendicularis D C. Quoniam area A B D, semper proportionalis est tempore quo corpus ex puncto A per rectam A C cadit, erit totius semicirculi area A D E B, proportionalis tempore quo corpus idem cadendo percurrit lineam A B, et divisim area segmenti B D E B, proportionalis tempore quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam C B.

(g) 393. Quoniam areae. Nam 1°. triangula C S P, C S D quorum est basis communis C S, sunt ut altitudines C P, C D. 2°. areae hyperbolae C B f P, C B E D sunt ut eadem altitudines C P, C D (374) unde 3°. divisim C B f P

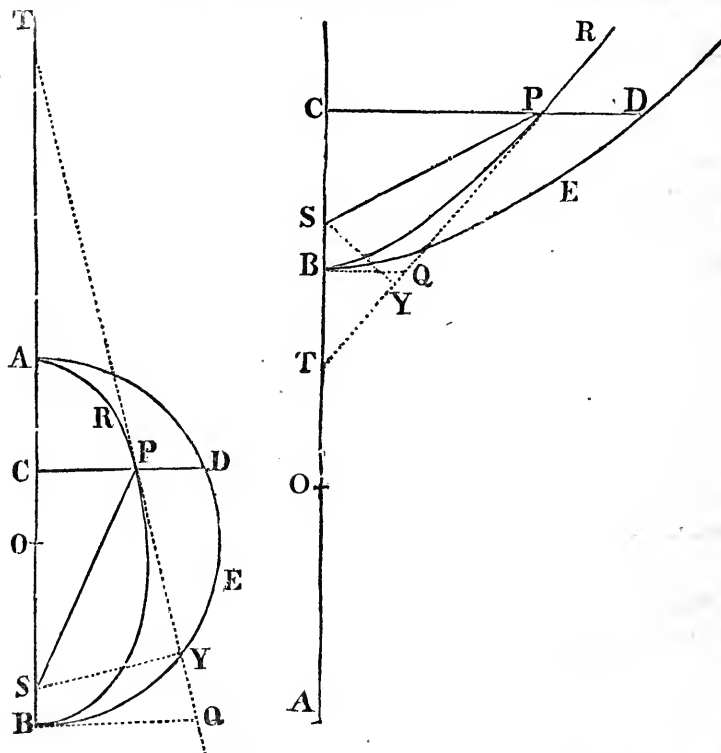
— C S P ad C B E D — C S D, hoc est, sector S P f B ad sectorem S D E B ut C P ad C D.

(h) 394. Simili argumento. In Parabola 1°. C S P : C S D = C P : C D. 2°. sit latus rectum Parabolae B f P = l, latus rectum Parabolae B E D = L, erit, ex naturâ Parabolae C P<sup>2</sup> = l × C B et C D<sup>2</sup> = L × C B; adeoque C P : C D = √ l : √ L, hoc est, in ratione datâ, ergo area C B f P est ad aream C B E D, in eadem ratione datâ C P ad

## PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

*Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circumulum describentis, in subduplicatâ ratione quam A C distantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A, habet ad figuræ semidiametrum principalem  $\frac{1}{2}$  A B.*

Bisecetur A B, communis utriusque figuræ R P B, D E B diameter, in O ; et agatur recta P T, quæ tangat figuram R P B in P, atque etiam



secet communem illam diametrum A B (si opus est productam) in T ; sitque S Y ad hanc rectam, et B Q ad hanc diametrum perpendicularis,

C D ; Quare 3°. divisim S P f B : S D E B = C P : C D. Cætera se habent ut in demonstratione casus secundi.

395. *Scholium.* Corporis per rectam C S, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem a

centro distantiam circumulum describentis, vel in ratione minore quam  $\sqrt{2}$ , ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casu recta S C, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis ; in 2°. casu, recta S C, est hyperbola cujus latus rectum evanescit ; in 3°. casu, recta

atque figuræ R P B latus rectum ponatur L. Constat per Corol. IX. Prop. XVI. quod corporis in lineâ R P B circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo S P circa idem centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli  $\frac{1}{2} L \times S P$  ad S Y quadratum. Est autem ex conicis A C B ad C P q ut  $2 A O$  ad L, ideoque  $\frac{2 C P q \times A O}{A C B}$  æquale L. Ergo velocitates illæ

sunt ad invicem in subduplicatâ ratione  $\frac{C P q \times A O \times S P}{A C B}$  ad S Y

quad. (1) Porro ex conicis est C O ad B O ut B O ad T O, et compositè vel divisim ut C B ad B T. Unde vel dividendo vel componendo fit B O — vel + C O ad B O ut C T ad B T, id est, A C ad A O ut C P ad B Q; indeque  $\frac{C P q \times A O \times S P}{A C B}$  æquale est,  $\frac{B Q q \times A C \times S P}{A O \times B C}$ .

Minuatur jam in infinitum figuræ R P B latitudo C P, sic ut punctum P coëat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, et lineâ S P cum lineâ B C, lineaque S Y cum lineâ B Q; et corporis jam rectâ descendentis in lineâ C B velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circulum describentis; in subduplicatâ ratione ipsius  $\frac{B Q q \times A C \times S P}{A O \times B C}$

ad S Y q, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus S P ad B C et B Q q ad S Y q) in subduplicatâ ratione A C ad A O sive  $\frac{1}{2} A B$ . Q. e. d.

Corol. 1. Punctis B et S coëuntibus, fit T C ad T S ut A C ad A O.

Corol. 2. (2) Corpus ad datam a centro distantiam in circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

S C, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex Coroll. 7<sup>o</sup>. Prop. XVI.

(1) 396. Porro ex conicis. (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) est T O : A O = A O : C O et quia A O = B O, invertendo et permutando est C O : B O = B O : T O et in Ellipsi compositè C O : B O = C B (seu C O + B O) : B T (seu B O + T O); et in hyperbolâ divisim, C O : B O = C B (seu C O — B O) : B T (seu B O — T O); Quare in utraque sectione, C O : B O = C B : B T. Undè in ellipsi dividendo fit A C, seu B O — C O, aut A O — C O : B O = C T, seu B T — C B : B T, et in hyperbolâ, componendo A C seu C O + B O : B O = C T seu C B + B T : B T; adeoque in utraque sectione A C : B O seu A O = C T : B T. Sed propter similitudinem triangulorum T C P, T B Q, C T : B T = C P : B Q, ergò A C :

A O = C P : B Q, et C P =  $\frac{B Q \times A C}{A O}$ ,

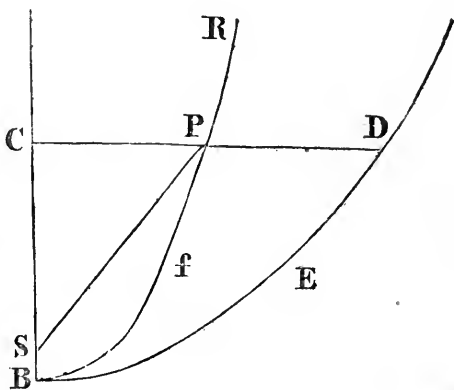
ac C P<sup>2</sup> =  $\frac{B Q^2 \times A C^2}{A O^2}$ , indèque  $\frac{C P^2 \times A O \times S P}{A C \times C B} = \frac{B Q^2 \times A C \times S P}{A O \times C B}$ .

(2) 397. Corpus ad datam. Si fuerit B E D circulus, et punctum C coincadat cum puncto O, erit A C = A O =  $\frac{1}{2} A B$ , adeoque velocitas per radium A O cadendo acquisita est æqualis velocitati corporis centro B intervallo B O = A O circulum describentis. Undè si corpus illud, ad datam a centro distantiam B O in circulo revolvens, sursum per O A, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum describit, seu quam per A O cadendo acquisivit, ascendet ad punctum A, per spatium O A (25) seu ad duplam suam a centro B distantiam B A = 2 B O.

## PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

*Si figura B E D parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quâ corpus centro B dimidio intervalli sui B C circumum uniformiter describere potest.*

Nam corporis parabolam R P B circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. VII. Prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli S P circumum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo C P in infinitum eo, ut arcus parabolicus P f B cum rectâ C B, centrum S cum vertice B, et intervallum S P cum intervallo B C coincidat, et constabit propositio. Q. e. d.



## PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

*Isdem positis, dico quod area figuræ D E S, radio indefinito S D descripta, æqualis sit area quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ D E S æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

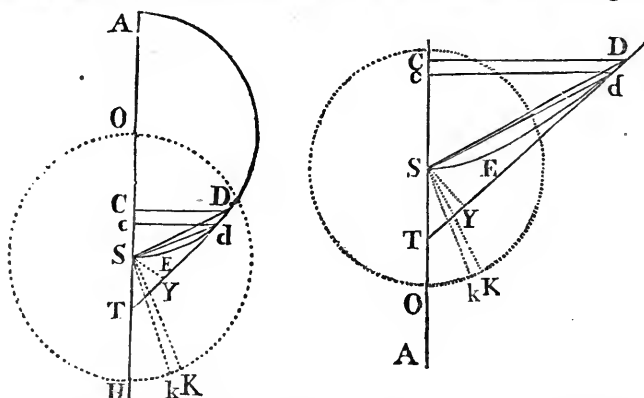
Nam concipe corpus C quam minimâ temporis particulâ lineolam C c

398. Corol. 1. Velocitas in puncto quovis C, est ad velocitatem in alio puncto c, in ratione subduplicatâ rectanguli A C × B C, ad rectangulum A c × B c. Nam velocitas in C, est ad velocitatem corporis intervallo B C circumum describentis ut  $\sqrt{A C}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$ , (per hanc Prop.); velocitas corporis intervallo B C circumum describentis est ad velocitatem corporis intervallo B c circumum describentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, hoc est, ut  $\sqrt{B c}$  ad  $\sqrt{B C}$ ; denique velocitas corporis intervallo B c circumum describentis est ad velocitatem in c corporis ex A cadentis ut  $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$  ad  $\sqrt{A c}$  (per hanc Propositionem); ergo (per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in

c, in ratione compositâ ex ratione  $\sqrt{A C}$  ad  $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$ , ratione  $\sqrt{B c}$  ad  $\sqrt{B C}$ , et ratione  $\sqrt{\frac{1}{2} A B}$  ad  $\sqrt{A c}$ , sive ut  $\sqrt{A C} \times \sqrt{B c}$  ad  $\sqrt{A c} \times \sqrt{B C}$ , hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli A C × B c ad rectangulum A c × B C. Q. e. d.

399. Corol. 2. Si fuerit B f P parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam S P, circumum describentis in ratione  $\sqrt{2}$ , ad 1; si fit ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. XVI.) et latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam B C circumum describentis ut  $\sqrt{2}$  ad 1. adeoque A C :  $\frac{1}{2} A B = 2 : 1$  in 2<sup>o</sup>. casu ratio A C, ad  $\frac{1}{2} A B$ , minor erit quam ratio 2 ad 1; in 5<sup>o</sup>. casu major, et contra.

cadendo describere, et interea corpus aliud K, uniformiter in circulo O K k circa centrum S gyrando, arcum K k describere. Erigantur per-



pendicula C D, c d occurrentia figuræ D E S in D, d. Jungantur S D, S d, S K, S k et ducatur D d axi A S occurrens in T, et ad eam demittatur perpendicularum S Y.

*Cas. 1.* Jam si figura D E S circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter A S in O, et erit S O dimidium lateris recti. <sup>(1)</sup> Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d, et <sup>(m)</sup> T D ad T S ut C D ad S Y, erit ex æquo T C ad T S ut C D × C c ad S Y × D d. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) <sup>(n)</sup> est T C ad T S ut A C ad A O, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo A C est ad A O seu S K ut C D × C c ad S Y × D d. Porro corporis descendens velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo S C circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione A C ad A O vel S K (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum O K k in subduplicatâ ratione S K ad S C (per Corol. VI. Prop. IV.) et ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola C c ad arcum K k in subduplicatâ ratione A C ad S C, <sup>(o)</sup> id est in ratione A C ad C D. Quare est C D × C c æquale A C × K k, et <sup>(p)</sup> propterea A C ad S K ut A C × K k ad S Y ×

<sup>(1)</sup> \* Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d. Quia in Triangulo T C D, est c d parallela basi C D, ideoque T C : T D ut partes correspondentes C c, D d.

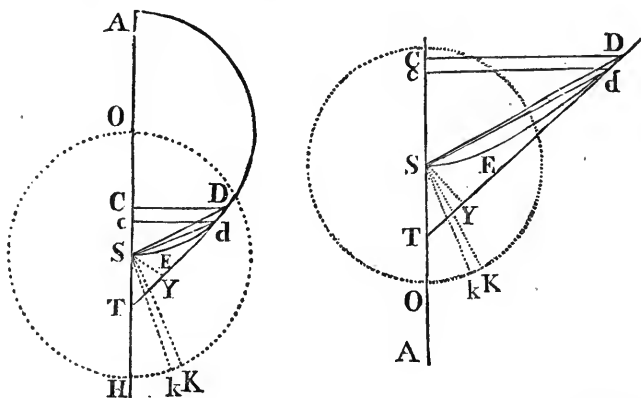
<sup>(m)</sup> \* Et T D ad T S ut C D ad S Y. Sunt enim propter angulos Y, et C, rectos et angulum T, communem, triangula T C D, T S Y, similia.

<sup>(n)</sup> \* Est T C : T S. Nam punctis D, d, coeuntibus, fit T D, tangens; adeoque (396.) T C : T S = A C : A O.

<sup>(o)</sup> \* In ratione A C ad S C, id est in ratione A C ad C D. Est enim S E D, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertexes S et A, sed in circulo et hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est C D<sup>2</sup> = A C × S C, et proinde A C : C D = C D : S C, et hinc A C ad C D, in ratione subduplicatâ A C ad S C.

<sup>(p)</sup> \* Et propterea. Nam ex superius demonstratis A C : S K = C D × C c : S Y × D d.

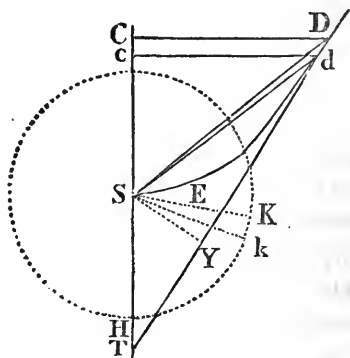
D d, indeque  $SK \times Kk$  æquale  $SY \times Dd$ , et  $\frac{1}{2} SK \times Kk$  æquale  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ , id est area  $KSk$  æqualis areæ  $SDd$ . Singulis igitur



temporis particulis generantur arearum duarum particulæ  $KSk$ , et  $SDd$ , quæ, si magnitudo earum minuatur et numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, et propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q. e. d.

*Cas. 2.* Quod si figura  $DES$  parabola sit, invenietur esse ut supra  $CD \times Cc$  ad  $SY \times Dd$  ut  $TC$  ad  $TS$ , hoc <sup>(1)</sup> est ut 2 ad 1, ideoque  $\frac{1}{4} CD \times Cc$  æquale esse  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ . Sed corporis cadentis velocitas in  $C$  æqualis est velocitati quâ circulus intervallo  $\frac{1}{2} SC$  uniformiter describi possit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio  $SK$  describi possit, hoc est, lineola  $Cc$  ad arcum  $Kk$  (per Corol. VI.

Prop. IV.) est in subduplicatâ ratione  $SK$  ad  $\frac{1}{2} SC$ , id <sup>(2)</sup> est, in ratione  $SK$  ad  $\frac{1}{2} CD$ . Quare est  $\frac{1}{2} SK \times Kk$  æquale  $\frac{1}{4} CD \times Cc$ , ideoque æquale  $\frac{1}{2} SY \times Dd$ , hoc est, area  $KSk$  æqualis areæ  $SDd$ , ut supra. Q. e. d.



<sup>(1)</sup> \* Hoc est ut 2 ad 1. Cum enim sit  $TD$  tangens,  $CD$  ordinata,  $SC$  abscissa, est ex naturâ Parabolæ  $TS = SC$ , adeoque  $TC : TS = 2 : 1$ .

<sup>(2)</sup> \* Id est in ratione  $SK$ , ad  $\frac{1}{2} CD$ . Nam (ex hyp.)  $SK$ , æqualis est dimidio lateri recto, quare ex naturâ parabolæ  $2 SK \times SC = CD^2$ ; et  $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$ . Unde

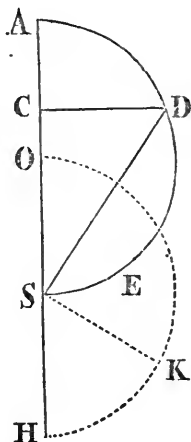
$SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$ , et hinc  $SK$ , ad  $\frac{1}{2} CD$  in ratione subduplicatâ  $SK$  ad  $\frac{1}{2} SC$ . 400. Corol. 1. Si fuerit  $SED$  circulus cujus diameter  $SA$ , corpus ex loco  $A$  demissum et solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurreret totam diametrum  $AS$ , eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam  $SO$ , describet semicirculum  $OKH$ ; sunt



## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

*Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.*

Super diametro A S distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum A D S, ut et huic æqualem semicirculum O K H circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam C D. Junge S D, et areæ A S D æqualem constitue sectorem O S K. (\*) Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium A C eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gylando, describere potest arcum O K. Q. e. f.



enim areæ semicirculorum O K H et S E A æquales, tempus verò quo corpus ex A demissum cadendo percurrit spatium quodvis A C est ad tempus quo percurrit A S, ut area A S D ad semicirculum A D E S, sive ut sector O S K ad sectorem quem describit corpus in circulo O K H revolvens æqualem semicirculo A D E S, qui sector erit ipse semicirculus O K H.

401. *Corol. 2.* Si corpus ad distantiam S A, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, et ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad  $4\sqrt{2}$ : est enim tempus periodicum corporis ad distantiam S O circulum describentis (hoc est, duplum ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit A S, (400)) ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S ( $= 2 S O$ ) in circulo revolvantis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 et 2, sive ut 1, ad  $\sqrt{8}$  (191), hoc est, ut 1 ad  $2\sqrt{2}$ ; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit A S, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S in circulo revolvantis ut  $\frac{1}{2}$  ad  $2\sqrt{2}$ , hoc est, ut 1 ad  $4\sqrt{2}$ .

402. *Scholium.* Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum a centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circa terram revolvantis sit dierum 27. hor. 7. minutum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit  $4\sqrt{2}$ ,

ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, et secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

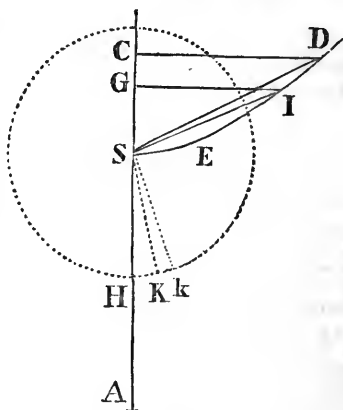
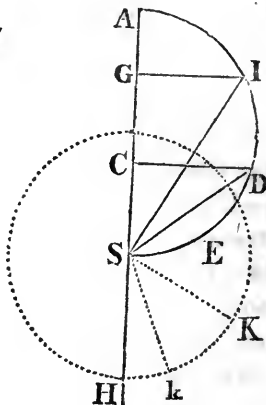
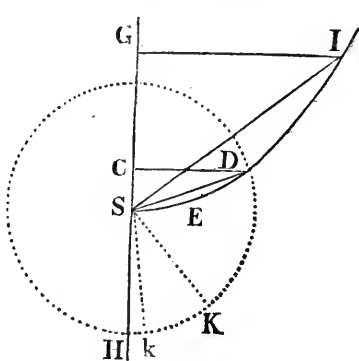
(\*) \* *Patet per Prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum A D S, O K H, et sectorum O S K, A S D, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector H S K æqualis segmento S E D, adeoque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit C S, æquatur temporì, quo corpus aliud in circulo O K H revolvens describit arcum K H, et quoniam tempus per A S cadendo æquatur temporì quo corpus revolvens totum semicirculum O K H, describit (401), erit tempus per A C, æquale temporì per arcum O K.

403. *Corol.* Arcus O K, æqualis est summae arcus A D et lineæ C D. Est enim sector A S D, æqualis sectori A O D, + triangulo D O S, sive  $\frac{1}{2} A O \times A D + \frac{1}{2} A O \times C D$ : sector verò O S K,  $= \frac{1}{2} S O \times O K = \frac{1}{2} A O \times O K$ , sed est sector O S K = A S D. Quare  $\frac{1}{2} A O \times O K = \frac{1}{2} A O \times A D + \frac{1}{2} A O \times C D$ , atque adeò O K = A D + C D. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita C D, ad  $4^{\text{um}}$ . B, erit B arcus rectæ C D æqualis, et obtinebitur O K = A D + B. Hinc dato tempore quo corpus datam A S ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ A S partem A C describit, si fiat ut semicirculus O K H, seu grad. 180, ad arcum A D + B, seu O K, ita tempus quo corpus ex A cadendo percurrit A S, ad tempus quo percurrit A C.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

*Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.*

Exeat corpus de loco dato  $G$  secundum lineam  $GS$  cum velocitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum  $S G$  circa centrum  $S$  revolvî posset, cape  $G A$  ad  $\frac{1}{2} A S$ . Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum  $A$  infinite distat, quo casu parabola vertice  $S$ , axe  $S G$ , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro  $S A$  describi debet. (\*) Patet per Prop. XXXIII. Tum centro  $S$ , intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur circulus  $H k K$ , et ad corporis descendentis vel ascendentis locum  $G$ , et locum alium quemvis  $C$ , erigan-  
tur perpendicula  $G I$ ,  $C D$  occurrentia conicæ sectioni vel circulo in  $I$  ac



(\*) \* *Potet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe  $A B$ , et in ea fingatur esse punctum  $G$  ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectionis, et ex proportionem velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum  $S G$  circa Centrum  $S$  revolveretur, agnoscetur, ex Cor. 7. Prop. XVI. et, si sit Ellipsis vel Hyperbola ejus axis major ex velocitate in  $G$  datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII. quia velocitatem corporis cadentis in puncto  $G$ ,

est ad velocitatem corporis in distantia  $S G$  revolvantis in subduplicatâ ratione distantie puncti  $G$  a vertice superiore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi-Axem, unde si fiat  $G A$  ad  $\frac{1}{2} S A$  in duplicatâ ratione velocitatis in  $G$  ad velocitatem corporis in distantia  $S G$  revolvantis, erit  $A$  vertex superior Ellipsis vel Hyperbolæ, et  $\frac{1}{2} S A$  semi-axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice  $S$  Parabola quævis, si curva evanescens in quâ  $G$  est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice  $S$  Diametro  $S A$ , si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eadem





Etenim in rectâ A E capiatur linea quam minima D E datæ longitudinis, sitque D L F locus lineæ E M G, ubi corpus versabatur in D; et si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream A B G E, sit ut descendens velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D et E, scribantur V et V + I, erit area A B F D ut V V, et area A B G E ut V V + 2 V I + I I, et divisim area D F G E ut 2 V I + I I, ideoque  $\frac{D F G E}{D E}$  ut  $\frac{2 V I + I I}{D E}$ , id (b)

est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo D F ut quantitas  $\frac{2 V I}{D E}$ , ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium  $\frac{I \times V}{D E}$ .

Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam D E, ut lineola illa directè et velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè et tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur,

ut  $\frac{I \times V}{D E}$ , hoc est, ut longitudo D F. Ergo vis ipsi D F vel E G proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream A B G E. Q. e. d.

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola D E describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream A B F D; (d) sitque D L, atque ideo area nascent D L M E, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area D L M E,

proportionalia, sitque B F G curva ad quam omnia illa perpendiculara terminentur. Possunt autem perpendiculara illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum*; hæ scilicet phrasæ synonymæ sunt; phrasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

(b) 406. \* *Id est, si primæ quantitatum nascentium, &c.* Seu cœuntibus punctis, D et E, F et G, sit area D F G E, æqualis rectangulo D F × D E (107) et velocitatis finitæ V, incrementum nascentis I, evanescit respectu V, (107) ac proinde cum sit I: V = II: VI, quadratum II, evanescit respectu rectanguli V<sub>1</sub> I, aut 2 V I; Quare in hoc casu  $\frac{D F G E}{D E} = \frac{D F \times D E}{D E} = D F$ , et  $\frac{2 V I + I I}{D E} = \frac{2 V I}{D E}$ ; Est igitur longitudo D F, ut quanti-

tas  $\frac{2 V I}{D E}$ , ideoque etiam, ut quantitatis hujus dimidium  $\frac{I \times V}{D E}$ : Quoniam autem velocitas

per spatium evanescens D E, est uniformis (145), si tempus quo D E percurritur, dicatur T, erit  $T = \frac{D E}{V}$ , (5). Est autem vis ut  $\frac{I}{T}$

(13) adeoque si loco T ponatur  $\frac{D E}{V}$ , erit vis ut  $\frac{I \times V}{D E}$ , hoc est, ut longitudo D F, ergo vis ipsi D F, vel E G, &c.

(c) \* *Porro cum tempus.* Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè et velocitas inversè (5), quare si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

(d) \* *Sitque D L.* Est enim D L, ut D L in constantem D E ducta, hoc est, ut area nascent D L M E, sed D L est ut latus quadratum areæ A B F D inversè (per constr.) ergo area nascent D L M E, est ut idem latus quadratum inversè, hoc est, ut velocitas inversè, sive, ut tempus per D E. Quare summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.



cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, et detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam e g, et capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum P Q R D areâ curvilineâ D F g e vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum P Q R D.

*Corol. 3.* Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam e m reciproce proportionalem lateri quadrato ex P Q R D + vel — D F g e, et capiendo tempus quo corpus descripsit lineam D e ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P et cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea D L m e ad rectangulum 2 P D × D L. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam P D est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam P E in <sup>(h)</sup> subduplicatâ ratione P D ad P E, id est (lineola D E jamjam nascente) in ratione P D ad P D +  $\frac{1}{2}$  D E seu 2 P D ad 2 P D + D E, et <sup>(i)</sup> divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam D E ut 2 P D ad D E, ideoque ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L M E; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam D E ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam D e, ut area D L M E ad aream D L m e, et ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L m e.

projicitur, erit, (ex Dem.) area A B g e proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Est autem (ex Dem.) area A B F D, æqualis rectangulo P Q R D, adeoque area A B g e = P Q R D + D F g e si locus e loco D inferior fuerit, et A B g e = P Q R D — D F g e, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergo velocitas corporis in loco e, est ut  $\sqrt{P Q R D \mp D F g e}$ ; cumque sit velocitas in D, ut  $\sqrt{A B F D}$ , sive ut huic æqualis  $\sqrt{P Q R D}$  (ex Dem.) erit velocitas in e. ad velocitatem in D, ut

$$\sqrt{P Q R D \mp D F g e} \text{ ad } \sqrt{P Q R D}.$$

(b) \* In subduplicatâ ratione P D, ad P E (27), id est, lineola D E, jamjam nascente in ratione P D, ad P D +  $\frac{1}{2}$  D E; quadratis enim his ultimis terminis fiet P D<sup>2</sup> : P D<sup>2</sup> + P D × D E +  $\frac{1}{4}$  D E<sup>2</sup>; et cum sit P D quantitas finita; et D E nascentis, evanescit (107)  $\frac{1}{4}$  D E<sup>2</sup> respectu P D × D E; adeoque P D × D E  $\mp \frac{1}{4}$  D E<sup>2</sup> = P D × D E. Unde est P D<sup>2</sup> : P D<sup>2</sup> + P D × D E +  $\frac{1}{4}$  D E<sup>2</sup> = P D<sup>2</sup> : P D<sup>2</sup> + P D × D E = P D : P D + D E, seu P E; est igitur P D : P E in ratione duplicatâ P D ad P D +  $\frac{1}{2}$  D E, atque adeo P D ad P D +  $\frac{1}{2}$  D E, in ratione subduplicatâ P D, ad P E.

(i) \* Et divisim. Tempus per P D, vi uniformi descriptum est ad tempus per D E, ut 2 P D, ad D E, adeoque ut rectangulum 2 P D × D L, ad rectangulum D E × D L, seu ad aream D L M E; tempus per rectam P D, vi uniformi descriptam sit T, tempus per D E, sit t, et tempus per D e, sit t, erit (ex Dem.) T : t = 2 P D × D L : D L M E, estque idem tempus t, quo utrumque corpus describit lineam D E, siquidem utriusque eadem est velocitas in D : sed (ex constructione) tempus quo corpus inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area D L M E, ad aream D L m e, ergo t : t = D L M E : D L m e; undè ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

407. Sit spatium a corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt d x, d v, d t, quantitates x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascent D E, sit uniformis

(145) erit  $v = \frac{dx}{dt}$  (5), ac proindè velocitatis incrementum  $d v = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , si sumatur d t, et n-

stans (164) sed est (13)  $y = \frac{d v}{d t}$ , adeoque

si loco  $d v$ , substituatur  $\frac{d d x}{d t}$ , invenietur  $y =$

$\frac{d d x}{d t^2}$ . Hæ sunt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor  $y, x, v, t$ , æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variables complectentur, ex quibus proinde æquationibus per calculum fluxionum et solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus  $y, x, v, t$ , ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu et descensu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. Corol. Cum sit juxta superiores formulas  $d t = \frac{d x}{v}$ , et  $d t = \frac{d v}{y}$ , ac proinde  $\frac{d x}{v}$

$$= \frac{d v}{y}, \text{ vel } y d x = v d v, \text{ erit } S. y d x = \frac{1}{2}$$

$v^2$ . Sed  $y d x = E G \times D E$ , seu fluxionis areæ  $A B G E$ ; ergo (147)  $S. y d x = \text{areæ } A B G E = \frac{1}{2} v^2$ , et  $v = \sqrt{2 A B G E}$ . Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco  $E$ , ut recta quæ potest aream curvilineam  $A B G E$ . Hinc est 1<sup>us</sup>. casus Prop. XXXIX. Newt.

Quoniam verò  $d t = \frac{d x}{v}$  et  $v = \sqrt{2 A B G E}$ ,

$$\text{erit } d t = \frac{d x}{\sqrt{2 A B G E}}; \text{ quare si capitur}$$

$$E M = \frac{1}{\sqrt{2 A B G E}}, \text{ erit } d t = E M \times d x$$

$= E M \times D E$ , et sumptis utrinque fluentibus  $t = \text{area } A L M E$ . Hic est casus 2<sup>us</sup>. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ  $y = \frac{d v}{d t}$  si vis cen-

tripetæ consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quæ centrum versus urgetur. Sit vis illa  $= y$ , et massa  $= m$ ,

$$\text{erit quidem semper } v = \frac{d x}{d t}$$

$$(5), \text{ at fiet } y = \frac{m d v}{d t}. \text{ Ete-}$$

nim vis centripetæ considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permallet, et uniformiter agit (117). Porro factum ex

potentiâ motrice uniformiter agente et tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentia motrice et tempore actionis proportionaliter, et factum ex massa corporis et celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis et quantitatem effectus et alter alteri æquivalet. Quare  $y d t = m d v$ , et  $y = \frac{m d v}{d t}$ .

410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, et corpora duo  $A, a$ , quorum massæ  $M, m$  ad idem vel diversa virium centra  $C$ , perpendicularariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis  $E, e$ , sint  $Y = E G, y = e g$ , velocitates  $V, v$ , spatia descripta  $X = A E, x = a e$ , tempora quibus descripta sunt  $T, t$ , invenietur (409)  $v = \frac{d x}{d t}, V = \frac{d X}{d T}$ , et  $y d t = m d v, Y d T = M d V$ , adeoque (408),  $S. y d x = a b g e = \frac{1}{2} m v v$ ; et similiter  $S. Y d X = A B G E = \frac{1}{2} M V V$ ,

$$\text{ob constantes } M, m; \text{ undè } v = \sqrt{\frac{2 a b g e}{m}},$$

$$V = \sqrt{\frac{2 A B G E}{M}}; \text{ proindeque } v : V =$$

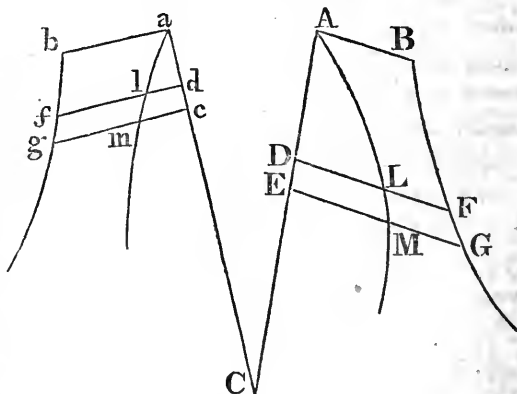
$$\sqrt{\frac{2 a b g e}{m}} : \sqrt{\frac{2 A B G E}{M}}. \text{ Quare } d t =$$

$$\frac{d x}{v} = \frac{d x \sqrt{m}}{\sqrt{2 a b g e}}, \text{ et } d T = \frac{d X \sqrt{M}}{\sqrt{2 A B G E}};$$

$$\text{undè si ponatur } e m = \frac{1}{\sqrt{2 a b g e}} \text{ et } E M$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 A B G E}}, \text{ erit } d t = d e \times e m \times$$

$$\sqrt{m}, \text{ et } d T = D E \times E M \times \sqrt{M}, \text{ ac consequenter } t = a l m e \times \sqrt{m}; \text{ et } T =$$



$$A L M E \times \sqrt{M}. \text{ Undè } t : T = a l m e \times \sqrt{m} : A L M E \times \sqrt{M}.$$



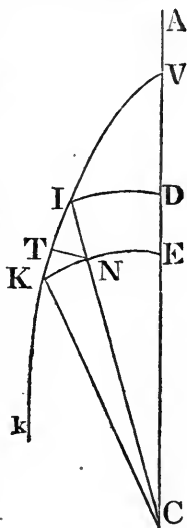
## SECTIO VIII.

*De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.*

## PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

*Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.*

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, et moveatur corpus aliud a V in lineâ curvâ V I K k. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici D I, E K rectæ A C in D et E, curvæque V I K in I et K occurrentes. Jungatur I C occurrens ipsi K E in N; et in I K demittatur perpendiculum N T; sitque circumferentiarum circularum intervallum D E vel I N quam minimum, et habeant corpora in D et I velocitates æquales. Quoniam distantie C D, C I æquantur, erunt vires centripetæ in D et I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas D E, I N; et si vis una I N (per legum Corol. 2.) resolvatur in duas N T et I T, vis N T, agendo secundum lineam N T corporis cursui I T K perpendiculari, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ I T K k progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera I T, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. (\*) Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus



(\*) \* Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T. Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè et tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus

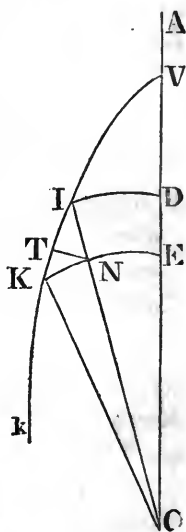
autem inæqualibus ut vires acceleratrices et tempora conjunctim; sed lineæ D E, I T, sunt ut vires acceleratrices in directionibus D E, I T; ergò corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim.

temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium  $DE$ ,  $IN$ ,  $IK$ ,  $IT$ ,  $NT$  rationes primæ) sunt ut lineæ  $DE$ ,  $IT$ : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim. Tempora autem quibus  $DE$  et  $IK$  describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ  $DE$  et  $IK$ , ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas  $DE$  et  $IK$ , sunt ut  $DE$  et  $IT$ ,  $DE$  et  $IK$  conjunctim, id est ut  $DE$  quad. et  $IT \times IK$  rectangulum. <sup>(1)</sup> Sed rectangulum  $IT \times IK$  æquale est  $IN$  quadrato, hoc est, æquale  $DE$  quad. et propterea accelerationes in transitu corporum a  $D$  et  $I$  ad  $E$  et  $K$  æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in  $E$  et  $K$ : et eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiiis. Q. e. d.

Sed et <sup>(m)</sup> eodem argumento corpora æquivelocia et æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si corpus vel oscilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politissimo et perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel <sup>(n)</sup> impedimento vasis absolutè lubrici idem præstatur quod vi transversâ  $NT$ . Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

*Corol. 2.* Hinc etiam si quantitas  $P$  sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas  $A$  distantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, et vis centripeta semper sit ut ipsius  $A$  dignitas



<sup>(1)</sup> \* Sed rectangulum  $IT \times IK$  æquale est  $IN$  quadrato, cum sit  $KN$   $I$  angulus rectus, et linea  $NT$  ab basim  $IK$  normalis, adeoque crus  $IN$  medium proportionale inter hypothenusam  $IK$  et illius abscissam  $IT$ .

<sup>(m)</sup> 411. Et eodem argumento. Vis enim acceleratrix motum corporis ascendantis eodem modo retardat, quo motum descendantis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum  $C$  in infinitum abeat, rectæ  $AC$ ,  $IC$  fiunt parallelæ et arcus  $DI$ ,  $EK$  in rectas, lineis  $AC$ ,  $IC$  perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio  $AC$ ,  $IC$  sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta  $D$ ,  $I$  æque alta sint, hoc est, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari summantur.

<sup>(n)</sup> \* Impedimento vasis. (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 91.)

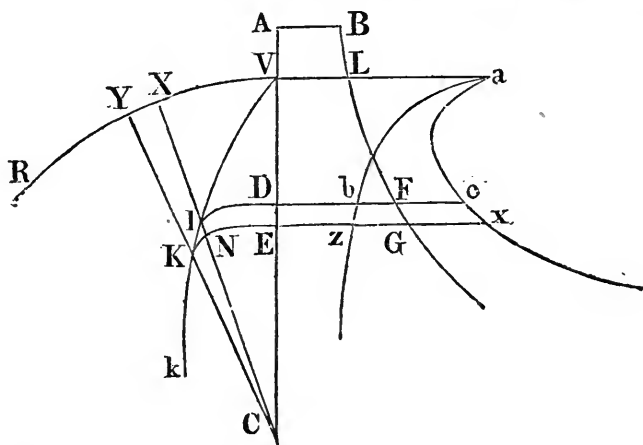




PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.*

Tendat vis quælibet ad centrum C et invenienda sit trajectory V I K k. Detur circulus V R centro C intervallo quovis C V descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli I D, K E trajectoryam secantes in



I et K rectamque C V in D et E. Age tum rectam C N I X secantem circulos K E, V R in N et X, tum rectam C K Y occurrentem circulo V R in Y. Sint autem puncta I et K sibi invicem vicinissima, et pergat corpus ab V per I et K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati

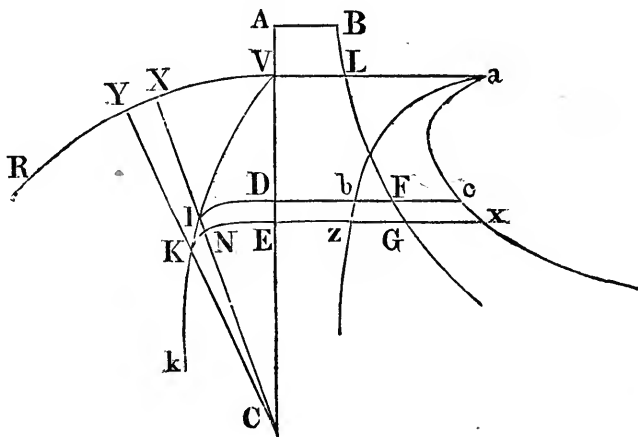
gravitatis corporis in I proportionale, seu  
 rectae Q P aequale; erit  $2 L o \pi Q \times m =$   
 $2 L O Q P$ , adeoque  $u = \frac{\sqrt{2 L O Q P + m e e}}{\sqrt{m}}$   
 $= \sqrt{2 L o \pi Q + e e e t u} = \sqrt{c c - 2 Q \pi x K}$ .  
 Et similiter si ponatur  $E \gamma \times M = E G$ ,  
 erit  $V = \sqrt{2 H r \gamma E + b b}$  et  $V =$   
 $\sqrt{a a - 2 E \gamma b A}$ .

417. *Corol. 3.* Si puncta H et V, E et I, fuerint æquè alta, et in illis lineæ E G, Q P vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit  $H R G E = L O P Q$ . Quare si præterea massæ M, æ, et velocitates b, c, in punctis H, V, æquantur, erit

adeoque  $V = u$ , in omnibus punctis æquè altis  
 E et I. Si in punctis æquè altis H et V,  
 E et I, vires centripetæ massarum M et m  
 rationem semper habeant, erit  $\frac{H R G E}{L O Q P} = \frac{M}{m}$ , proindeque  $\frac{2 H R G E}{M} = \frac{2 L O Q P}{m} + m e e$   
 $= \frac{2 L O Q P}{m}$ . Undè si præterea ponatur b b

$= e$  c, erit  $V = u$ , quæ est Propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas  $M$  et  $m$  exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

corporis prioris in I. Et stantibus quæ in Propositione XXXIX. lineola I K, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream A B F D, et <sup>(p)</sup> triangulum I C K tempori

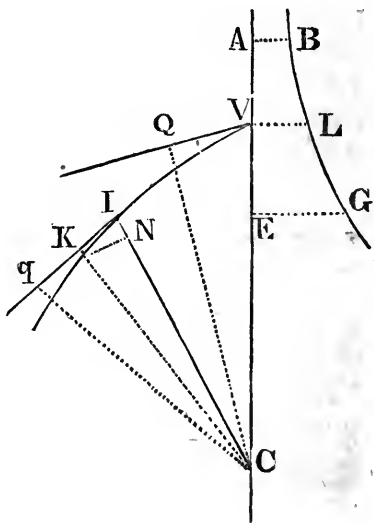


proportionale dabitur, ideoque K N erit reciprocè ut altitudo I C, id est, si detur quantitas aliqua Q, et altitudo I C nominetur A, ut  $\frac{Q}{A}$ . Hanc quantitatem  $\frac{Q}{A}$  nominemus Z, et ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu  $\sqrt{A B F D}$  ad Z ut est I K ad K N, et <sup>(q)</sup> erit in omni casu  $\sqrt{A B F D}$  ad Z ut I K ad K N, et A B F D

<sup>(p)</sup> \* *Triangulum I C K tempori quo describitur proportionale* (per Prop. I.) dato tempore dabitur; Est autem trianguli I C K area  $= \frac{1}{2} K N \times I C$ . Quare erit rectangulum  $K N \times I C$  quantitati constanti æquale, et hinc lineola K N æqualis quantitati constanti ad I C applicatæ, hoc est, K N reciprocè ut I C.

<sup>(q)</sup> \* *Erit in omni casu.* Quoniam I K est semper ut  $\sqrt{A B F D}$ , hoc est I K ad  $\sqrt{A B F D}$  in datâ ratione, et similiter Z ad K N in datâ ratione, si in aliquo casu sit  $\sqrt{A B F D}$  ad Z ut I K ad K N adeoque  $\sqrt{A B F D}$  ad I K ut Z ad K N, erit in omni casu  $\sqrt{A B F D}$  ad I K ut Z ad K N, ac proinde  $\sqrt{A B F D}$  ad Z ut I K ad K N.

418. Ducatur V L parallela E G quæ curvæ B F G occurrat in L, et ex centro C ad Q V tangentem in V, ac ad q I, tangentem in I, demissis perpendicularis C Q, C q, erit C Q  $\times \sqrt{A B f . V}$  quantitas constans et æqualis C q  $\times \sqrt{A B F D}$ . Nam (per Corol. 1. Prop. I.) velocitas in V (adeoque  $\sqrt{A B L V}$ ) est ut C Q reciprocè, id est, ut  $\frac{1}{C Q}$  directè et proinde C Q  $\times \sqrt{A B L V}$  ut quantitas constans



ad  $ZZ$  ut  $IK$  q ad  $KN$  q, et divisim  $ABFD - ZZ$  ad  $ZZ$  ut  $IN$  (<sup>r</sup>) quad. ad  $KN$  quad. ideoque  $\sqrt{ABFD - ZZ}$  ad  $Z$  seu  $\frac{Q}{A}$  ut  $IN$

ad  $KN$ , et propterea  $A \times KN$  æquale  $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$ . (<sup>s</sup>) Un-

de cum  $YX \times XC$  sit ad  $A \times KN$  ut  $CX$  q ad  $A$ , erit rectangulum  $XY \times XC$  æquale  $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$ . Igitur si in per-

pendiculo  $DF$  capiantur semper  $D b$ ,  $D c$  ipsis  $\frac{Q}{2 \sqrt{ABFD - ZZ}}$ ,

$\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2 AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$  æquales respectivè, et describantur curvæ

lineæ  $a b$ ,  $a c$ , quas puncta  $b$ ,  $c$  perpetuo tangunt; deque puncto  $V$  ad lineam  $AC$  erigatur perpendicularum  $V a$  abscindens areas curvilineas  $VD b a$ ,  $VD c a$ , et erigantur etiam ordinatæ  $E z$ ,  $E x$ : quoniam rectangulum  $D b \times IN$  seu  $D b z E$  æquale est dimidio rectanguli  $A \times KN$  seu triangulo  $ICK$ ; et rectangulum  $D c \times IN$  seu  $D c x E$  æquale est dimidio rectanguli  $YX \times XC$  seu triangulo  $XC Y$ ; hoc est, quoniam arearum  $VD b a$ ,  $VIC$  æquales semper sunt nascentes particulæ  $D b z E$ ,  $ICK$ , et arearum  $VD c a$ ,  $VCX$  æquales semper sunt nascentes particulæ  $D c x E$ ,  $XC Y$ , erit area genita  $VD b a$  æqualis areæ genitæ  $VIC$ , ideoque temporis proportionalis, et area genita  $VD c a$  æqualis sectori genito  $VCX$ . Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco  $V$ , (<sup>t</sup>) dabitur area ipsi proportionalis  $VD b a$ , et inde dabitur corporis altitudo  $CD$  vel  $CI$ ; et area  $VD c a$ , eique æqualis sector  $VCX$  unâ cum ejus angulo  $VCI$ . Datis autem angulo  $VCI$  et altitudine  $CI$  datur locus  $I$ , in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. e. i.

*Corol.* 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, ap-

1, et pariter velocitas in  $I$  (adeoque  $\sqrt{ABFD}$ ) est ut  $Cq$  reciproce, id est, ut  $\frac{1}{Cq}$  directe, et proinde  $Cq \times \sqrt{ABFD}$ , ut quantitas constans  $I$ , adeoque  $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABL V}$ .

Si itaque capiatur  $Q = CQ \times \sqrt{ABL V} = Cq \times \sqrt{ABFD}$ , et  $Z = \frac{Q}{IC}$  (unde est  $Q = Z \times IC$ ) erit semper  $\sqrt{ABFD} : Z = IC : Cq = IK : KN$ . Nam propter triangu-  
la  $ICK$ ,  $ICq$  similia, est  $IK$  ad  $KN$  ut  $IC$  ad  $Cq$ , sed quia  $Z \times IC (= Q)$

$= Cq \times \sqrt{ABFD}$  est  $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$  ergo  $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$ .

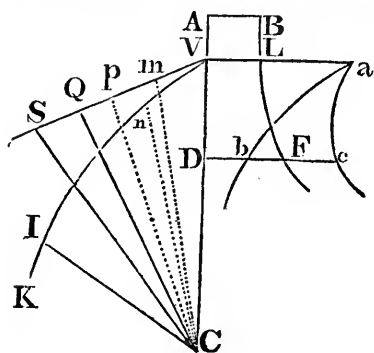
(<sup>r</sup>)  $\times Ut IN^2$ , ad  $KN^2$ . Est enim ob angulum  $INK$  rectum,  $IK^2 - KN^2 = IN^2$ .

(<sup>s</sup>) \* Undè cum  $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$ . Sunt enim triangu-  
la nascentia  $CKN$ ,  $CYX$  similia et eorum proinde areæ duplæ  $YX \times XC$ ,  $IC \times KN$ , seu  $A \times KN$ , in ratione duplicatâ homologorum laterum  $CX$ ,  $CI$ , sive  $A$ .

(<sup>t</sup>) 419. Dabitur area ipsi proportionalis. Datâ corporis velocitate et directione seu tan-

sides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta  $IC$  per centrum ducta incidit perpendiculariter in

gente in  $V$ , datur spatium  $VS$  quod corpus in illâ tangente dato tempore quo describitur area  $VIC$  uniformi motu describeret. Porro junctâ



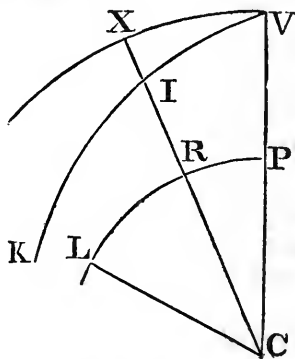
$C S$ , area trianguli  $C S V$  æqualis erit areæ  $V I C$ , quam corpus in curvâ  $V I K$  motum describit eodem tempore quo uniformiter percurreretur  $V S$ . Nam tempusculo nascente velocitate æquabili spatium  $V m$  describitur in tangente  $V S$ , et eodem tempusculo arcus  $V n$  describitur in curvâ  $V I K$ , erit (per Prop. I.) area  $V C m = V C n$ , et ob velocitatem uniformem in tangente singulo tempusculo lineolæ æquales  $V m$ ,  $m p$ , &c. percurruntur ideoque æquabuntur triangula  $V C m$ ,  $m C p$ , &c., sed pariter omnes areæ æqualibus tempusculis descriptæ in curvâ  $V I K$  æquantur areæ  $V C n$  sive  $V C m$ , undè patet summam arearum  $V C m + m C p +$ , &c. æqualem esse summæ arearum quæ eodem tempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas  $V C S$ ,  $V I C$ , eodem tempore descriptas esse æquales. Cum igitur data sit tangens  $V S$  et perpendicularum  $C Q$  in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli  $V C S$ , et area  $V I C$  ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area  $V D b a = V C S = V I C$ , et undè dabitur  $V D$ , atque  $C D = C V - V D$ ; dabitur quoque constans  $Q = Q C \times \sqrt{A B L V}$  (418).

420. Si ponatur variabilis  $I C = C D = x$ , data  $V C = a$ , erit  $V D = a - x$  et  $Z = \frac{Q}{x}$ , concessisque figurarum curvilinearum quadraturis area  $A B F D$  exprimi poterit per datas  $A V$ ,  $V C$  et variabilem  $x$ , ac proinde iisdem quantitativis exprimi poterunt 
$$\frac{Q \times C x^2}{2 \sqrt{A B F D} - Z Z}$$
 seu ordinatim applicatæ  $D b$ ,  $D c$ ; et hinc obtinebuntur

æquationes ad curvas  $a b$ ,  $a c$ , ex constantibus et solis variabilibus  $C D$ ,  $D b$ , vel  $D c$ , compositæ, curvæque illæ poterunt describi. Quoniam porro est (per constr.) sector  $V C X$ , æqualis areæ  $V D c a$ , erit arcus  $V X = \frac{2 V D c a}{C V}$ ;

quarè invenitur angulus  $V C X$ , et indè punctum  $I$ , in trajectoriâ  $V I K$ .

421. *Scholium.* Datâ vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ  $V I K$ , et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria  $V I K$  describi potest, ut in Probl. XXVIII. licet gravitates massis non supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus a centro distantis. Nam factum  $M \times E G$ , ex corporis massa  $M$  in perpendicularum  $E G$ , ejusdem corporis gravitatem in loco quovis  $I$  exhibeat, sitque  $B L F G$  curva quam punctum  $G$  perpetuò tangit, velocitas in loco  $V$  dicatur  $C$ , linea  $A B$  ita abscindatur ut sit area  $A B L V = \frac{1}{2} C C$ ; erit velocitas in  $I = \sqrt{2 V L F D + 2 A B L V}$  (416), id est  $= \sqrt{2 A B F D}$ , adeoque ut  $\sqrt{A B F D}$ , undè lineola  $I K$  dato tempore quam minimo descripta erit ut  $\sqrt{A B F D}$ , et triangulum  $I C K$ , &c. Cætera quæ in Probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia et constructiones manent eadem.



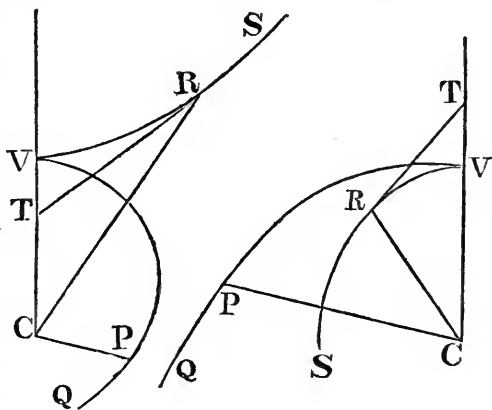
422. Trajectoria  $V I K$ , geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ  $V D c a$ ; et hujus sectoris radius est ad  $C X$  radium, circuli  $V X Y$ , ut  $n$  ad  $1$  estque  $n$  numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli  $L P C =$  areæ  $V D c a$ , id est, æqualis sectori  $V C X$ , sitque radius  $C P$  ad radium  $C V$ , ut  $n$ , ad  $1$ , erit  $C P \times P L = C V \times V X$ , et  $C P : C V = n : 1 = V X : P L$ , (per hyp.) et  $C P : C V = n : 1 = P R : V X$  (ex naturâ circuli). Quare per



trajectoriam  $V I K$ , id <sup>(t)</sup> quod fit ubi rectæ  $I K$  et  $N K$  æquantur, ideoque ubi area  $A B F D$  æqualis est  $Z Z$ .

(<sup>u</sup>) *Corol.* 2. Sed et angulus  $K I N$ , in quo trajectory alicubi secat lineam illam  $I C$ , ex datâ corporis altitudine  $I C$  expeditè invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut  $K N$  ad  $I K$ , id est, ut  $Z$  ad latus quadratum areæ  $A B F D$ .

(<sup>x</sup>) *Corol.* 3. Si centro  $C$  et vertice principali  $V$  describatur sectio quælibet conica  $V R S$ , et a quovis ejus puncto  $R$  agatur tangens  $R T$  occurrens axi infinitè producto  $C V$  in puncto  $T$ ; dein junctâ  $C R$  ducatur recta  $C P$ , quæ æqualis sit abscissæ  $C T$ , angulumque  $V C P$  sectori  $V C R$  proportionalem constituat; tendat autem ad centrum  $C$  vis centripeta cubo distantiae locorum a centro reciproce proportionalis, et exeat corpus de loco  $V$  justâ cum velocitate secundum



lineam rectæ  $C V$  perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoryâ  $V P Q$  quam punctum  $P$  perpetuò tangit; ideoque si conica sectio  $V R S$  hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò et abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâ-

compositionem rationum et ex æquo  $n n : 1 = R P : P L$ . Si ergò fuerit  $n n$ , ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu  $P L$ , inveniri poterit arcus  $R P$  per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ  $C I$  positio et punctum  $I$ , in curvâ  $V I K$  per finitas æquationes determinantur, erit  $V K$  curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus Prop. XXV. Lib. I. Phoron. hoc elegans et difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitibus finitis expressum.

(<sup>t</sup>) \* Id quod fit ubi rectæ  $I K$  et  $K N$  æquantur. Tunc enim punctum  $N$  coincidit cum puncto  $I$ , ob angulum  $K I N$  rectum, adeoque ob proportionem  $\sqrt{A B F D} : Z = I K : K N$ , fit  $A B D F = Z Z = \frac{Q Q}{I C^2}$ , et

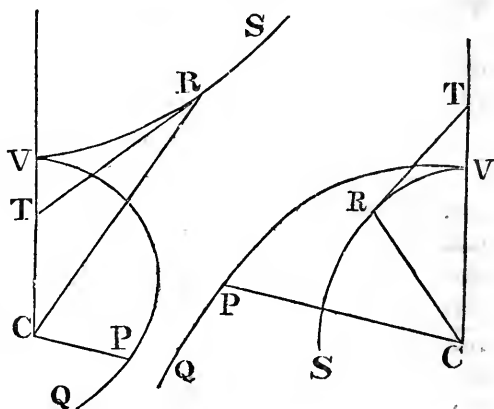
$I C^2 \times A B F D = Q Q$  quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area  $A B F D$  in quantitibus constantibus et variabili  $I C$  seu  $C D$ , invenietur valor  $I C$ , hoc est, maximæ et minimæ altitudines corporis trajectoryam  $V K$  describentis.

(<sup>u</sup>) \* *Corol.* 2. Ob angulum  $K N I$  rectum in triangulo nascente  $K I N$ , sinus anguli  $K I N$  est ad sinum totum, ut  $K N$  ad  $I K$ , id est, ut  $Z$  (seu  $\frac{Q}{I C}$ ) ad  $\sqrt{A B F D}$ . Verum datâ  $I C$  datur area  $A B F D$ , et indè ob quantitatem  $Q$  datam datur ratio  $\frac{Q}{I C}$  ad

$\sqrt{A B F D}$ , hoc est, ratio sinus anguli  $K I N$ , ad radium. Invenietur ergò sinus anguli  $K I N$ , et hinc angulus ipse cognoscetur.

(<sup>x</sup>) 425. *Lemma.* Si fuerit  $D V C$ , circuli quadrans cujus radius  $C V = r$  abscissa  $C B = z$ , ordinatæ infinitè propinquæ  $B R$ ,  $b r$ ,

cunque cum velocitate exeat de loco V, et perinde ut incœperit vel obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura V R S vel hyperbola sit vel ellipsis, inveniri potest trajectory augendo vel minuendo angulum V C P in datâ aliquâ ratione. Sed et, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoryâ V P Q, quæ invenitur capiendo angulum V C P sectori elliptico V R C proportionalem, et longitudinem C P longitudini C T æqua-



fluxio arcûs D R erit  $\frac{r dz}{\sqrt{rr - zz}}$ , et fluxio

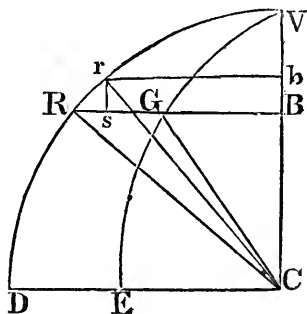
$$\text{sectoris C D R} = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr - zz}}$$

Est enim B R =  $\sqrt{rr - zz}$ , et demissâ ex puncto r in R B, perpendiculari r s, triangula similia R C B, r R s, dant R B ( $\sqrt{rr - zz}$ ):

$$R C (r) = r s (dz) : R r = \frac{r dz}{\sqrt{rr - zz}}$$

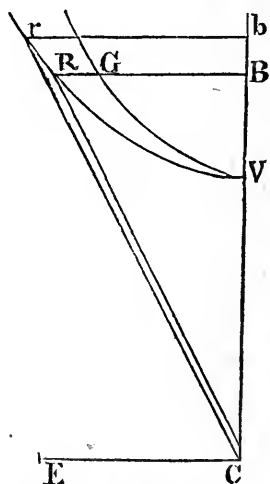
Q. e. 1. Porro sector nascens C R r =  $\frac{1}{2} C R$

$$\times R r = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr - zz}} \quad \text{Q. e. 2.}$$



424. *Corol.* Si fuerit E G V C, quadrans ellipsoe ejus centrum C, semiaxis unus C V = r, alter semiaxis C E = c, abscissa C B = z, et B G ordinatim applicata ad axem C V, sectoris C E G fluxio erit =  $\frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{rr - zz}}$ .

Sunt enim sectores C D R, C E G, adeoque et eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).



425. *Lemma.* Si fuerit V R r, hyperbola æquilatera ejus centrum C, semiaxis transversus C V = r, abscissa C B = z, R B ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici C R V fluxio erit  $\frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{zz - rr}}$ . Agatur enim r b ordinata, priori R B infinitè propinqua, sitque R B = y, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) y y = z z - r r, et y =  $\sqrt{zz - rr}$ .

lem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratiâ missam facio.

Undè  $2y dy = 2z dz$ , et  $dy = \frac{z dz}{\sqrt{zz - rr}}$   
 Porro triangulum  $CRB = \frac{1}{2}zy$ , et illius fluxus  $= \frac{1}{2}z dy + \frac{1}{2}y dz =$  trapezio  $BbrR$  + triang.  $CrR$ ; sed trapezium nascens  $BbrR = y dz$ , ergò sector nascens  $CrR = \frac{1}{2}z dy - \frac{1}{2}y dz = \frac{\frac{1}{2}zz dz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{1}{2}dz \times \sqrt{(zz - rr)} = \frac{\frac{1}{2}zz dz}{\sqrt{zz - rr}} - \frac{1}{2}zz dz + \frac{1}{2}rr dz = \frac{\frac{1}{2}rr dz}{\sqrt{zz - rr}}$ . Q. e. d.

426. Corol. 1. Quoniam (ex demonstratis)  $dy = \frac{z dz}{\sqrt{zz - rr}}$ , et  $yy = zz - rr$ , erit  $\frac{dy}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{dy}{z}$ , et  $z = \sqrt{yy + rr}$ , adeoque  $CrR = \frac{\frac{1}{2}rr dz}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{\frac{1}{2}rr dy}{\sqrt{yy + rr}}$ .

427. Corol. 2. Si descripta fuerit altera hyperbola  $GV$ , cujus idem centrum  $C$ , idem semiaxis transversus  $CV = r$ , semiaxis conjugatus  $CE = c$ ; sectoris  $CGV$  fluxus erit  $= \frac{\frac{1}{2}rc dz}{\sqrt{zz - rr}} = \frac{\frac{1}{2}rc dy}{\sqrt{yy + rr}}$ . Est enim sector  $CrV$  ad sectorem  $CGV$ , adeoque prioris fluxus ad fluxionem posterioris in datâ ratione  $r$  ad  $c$ . (374.) ad  $c$ . (374.)

428. Lemma. Iisdem positis quæ in superioribus Newtoni propositionibus, sit  $CV = r$ ,  $CA = a$ ,  $CD$  vel  $C\Delta = x$ ,  $DF$  vel  $\Delta\Phi = y$ ; et si fuerit vis centripeta in loco quovis  $D$  ut  $\frac{1}{CD^3}$ , sitque  $2f^4$  quanti-

tas data, erit  $y = \frac{2f^4}{x^3}$ , æquatio ad curvam  $BFG$ , et quoniam in æquatione  $y$  infinita evadit si  $x$  ponatur  $= 0$ , et similiter  $x$  infinita fit si  $y = 0$ , liquet rectas sibi mutuò perpendiculares  $CO$ ,  $CS$  esse curvæ  $BFG$  asymptotas. Area  $DFGE = y dx = \frac{2f^4 dx}{x^3}$ , undè sumptis fluentibus additæque constanti  $Q$ , erit area in infinitum versus  $S$  protensa  $CDFsSC = Q - \frac{f^4}{xx}$ ;

Ponatur  $x$  infinita, et erit  $\frac{f^4}{xx} = 0$ ,

et area  $CDFsS$ , mutabitur in aream utrinque infinitè protensam  $COosSC$ ; quare  $COosSC = Q$ ; et hinc  $COosSC - CDFsSC = ODFo = Q - Q +$

$\frac{f^4}{xx} = \frac{f^4}{xx}$ , id est, area  $ODFo$ , vel  $O\Delta\Phi o$  versus  $O$  in infinitum extensa, æqualis est quantitati finitæ  $\frac{f^4}{xx}$ .

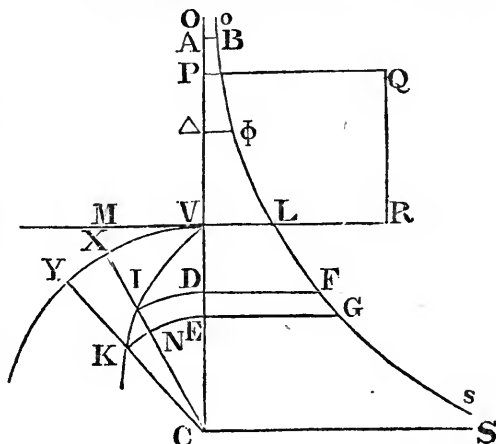
429. Corol. 1. Area infinitè protensa  $OVL o = \frac{f^4}{rr}$ ; area  $OAB o = \frac{f^4}{aa}$  et proinde  $\sqrt{OVL o} = \frac{ff}{r}$ ,  $\sqrt{OAB o} = \frac{ff}{a}$ .

430. Corol. 2. Area  $ARLV = OVL o - OAB o = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$ , ponendo  $aa - rr = cc$  (429) undè  $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$ .

431. Corol. 3. Similiter si punctum  $D$  sit inter puncta data  $C$ ,  $V$ , et punctum  $\Delta$  inter puncta data  $V$ ,  $A$ ; erit area  $AB\Phi\Delta$ , vel  $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$ , area  $VLF D = \frac{f^4 \times rr - xx}{rrxx}$ ,  $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$ .

(428. 429. 430.)

432. Iisdem manentibus quæ in Lemmate superiori (428) si corpus de loco  $V$ , cum velo-



citate quâlibet secundùm directionem  $VM$  ad  $C$   $V$  perpendicularem projiciatur ut curvam  $VIK$  describat, erit  $VM$  hujus curvæ tangens in puncto  $V$ ,  $CV$  ad tangentem  $VM$  normalis,



bola V R, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum R B, et tangens R T, axi occurrens in T, et C B, dicatur = z,

erit (427)  $\frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{z z - r r}}$ , fluxio sectoris hyperbolici C R V, et (ex conicis) C B (z) : C V (r) = C V (r) : C T =  $\frac{r r}{z} = x = C I$ . Ita-

que cum sit  $CXY = \frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{zz - rr}}$ , si suman-

tur utrinque fluentes additā constanti  $Q$  erit sector circuli  $C X V$ , æqualis sectori hyperbolico  $C R V + Q$ , invenitur autem  $Q = 0$ . Nam posita  $C T$  seu  $x = r$ , sit quoque  $z = r$ , ob  $\frac{r}{z} = x$ , et puncta  $B$  et  $V$  coeunt, evanescitque

sector C R V, et quoniam posita  $x = r$  corpus projectum est in V, punctum X coincidit quoque in hoc casu cum puncto V, et fit  $CXV = o$ , unde aequio  $CXV = CRV + Q$ , mutatur in hanc  $o = o + Q$ . Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper  $CXV = CRV$ . Quare invenitur punctum I in trajectory VIK, capiendosectorem  $CXV = CRV$ , et in linea CX sumendo CI = CT.

457. *Casus 3<sup>us</sup>*. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculari V L, capiatur V R ad V L in ratione visae gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, et compleatur rectangulum P V R Q cujus latus quadratum dicatur e; et velocitas projectionis erit ut e, (per Cor.1. Prop.XXXIX.) Quare (430) Q =

$r e, Z Z = \frac{r r e e}{x x}$ ; et quoniam velocitas cor-  
 poris trajectoriam V I K descriptibentis continuò  
 decrescit atquè corpus a centro C perpetuò recedit  
 (434), loco areæ A B F D, (Prop. XLI.)  
 capiendâ est quantitas  $e e - \Delta \Phi L V = e e -$   
 $\frac{f^4 x x x - r r}{r r x x}$  (431) =  $\frac{r r e e x x - f^4 x x + f^4 r r}{r r x x}$ ,  
 et quantitas A B F D - Z Z, (Prop. XLI.) erit  
 hic =  $\frac{r^2 e^2 x x - f^4 x x + f^4 r r - r^4 e e}{r r x x}$

Est autem area rectanguli P V R Q major aë  
infinite protensa O V L o, hoc est, quantitas e e  
major quam  $\frac{f^4}{r r}$ , et proinde r r e — f <sup>4</sup>, quan-

titas positiva, fiat igitur  $r r e e - f^4 = b b r r$ ,  
et quantitas  $A B F D - Z Z$ , (Prop. XLI.)  
evadet  $= \frac{b b r r x x - b b r^4}{x^2}$ , et

$$\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b \sqrt{\overbrace{xx}^{rrxx} - rr}}{r}; \text{ hinc}$$

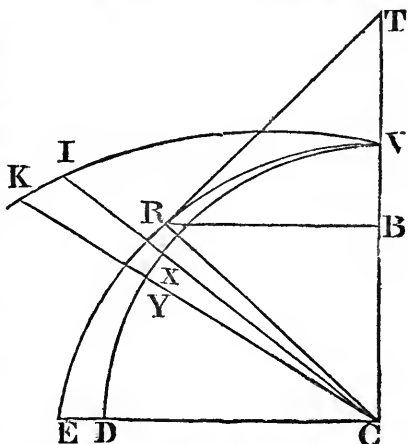
factis debitis substitutionibus, formula (Prop.  
XLi.)  $\frac{Q \times C X^2 \times I N}{2 A A \sqrt{A B F D - Z Z}}$ , in hanc mu-

$$\begin{aligned} \text{tabitur } \frac{r^3 \text{ ed } x}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx-rr}} &= \frac{\frac{1}{2} r^3 \text{ ed } x}{bx\sqrt{xx-rr}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} r^2 \text{ c } dx}{x\sqrt{xx-rr}} \text{ ponendo } \frac{re}{b} = c. \text{ Quare} \end{aligned}$$

sector circuli CXY =  $\frac{\frac{1}{2} r^2 c d x}{x \sqrt{x x - r r}}$ . Fiat x  
 $= \frac{r r}{z}$  et erit  $\frac{d x}{x} = -\frac{d z}{z}$ , ac  $\sqrt{x x - r r} =$   
 $\frac{r \sqrt{r r - z z}}{z}$  atque  $\frac{\frac{1}{2} r^2 c d x}{x \sqrt{x x - r r}} = -$

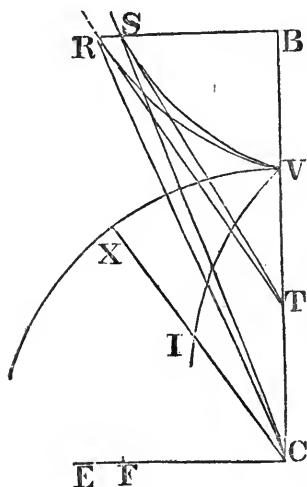
$\frac{\frac{1}{2} r e d z}{\sqrt{r r - z z}} = C X Y$ . Centro C, semiaxe  
 $C V = r$ , et altero semiaxe  $C E = c$ , descri-  
 batur ellipsis quadrans V E, ex cuius puncto  
 quovis R agatur ad axem C V perpendicularum  
 R B, et tangens R T axi producta occurrans in  
 T, et C B dicatur  $= z$ , erit (ex conicis) C B  
 $(z) : C V (r) = C V (r) : C T = \frac{r}{z} = x =$

C I; et (424)  $\frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{r r - z z}}$ , fluxio sectoris elliptici C R E; quare cum sit C X Y =  $-\frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{r r - z z}}$ , si sumantur utrinque fluentes additæ constanti Q, erit sector circuli C X V = Q - C R E. Ut inveniatur valor quantitatis constantis Q, ponatur C X V = o, erit Q = C R E; sed ubi C X V = o puncta X et I



cum puncto V coeunt, et fit CT seu CI = CV, adeoque punctum R coincidit etiam cum puncto V, et sector CER, æqualis fit quadranti CEV; ergo Q = CEV. Est igitur semper CXV = CEV — CRE = CRV. Itaque ut inveniatr trajectory VIK punctum I, capiatr sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, et in lineâ CX, productâ capiatur CI = CT, erit I punctum in trajectory quæsita.

438. Datâ velocitate projectionis et magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430) describi potest trajectory V I K. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; et sumptâ V R ad V L in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum P Q R V. Porro si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ O V L o, corpus circumum describet (per cas. 1. not. 435); si rectangulum minus est areâ O V L o, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis A B, abscindat aream A B L V æqualem rectangulo P Q R V; et trajectory V I K, describetur (per constr. cas. 2<sup>a</sup>). (456). Si rectangulum P Q R V areâ O V L o majus est, adhibenda erit constructio casus 3<sup>a</sup>. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centrum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



439. Casus 2<sup>us</sup>, et 3<sup>us</sup>, construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis C V = r, et alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positâ quæ in constructione casus 2<sup>a</sup>, semiaxe transverso C V = r, et semiaxe quovis conjugato C F, describatur hyperbola altera S V, quam in S secât perpendicularum R B; tangentes R T, S T per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) et sector C R V est ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F (374). Quare cum (per constr. cas. 2<sup>a</sup>)

sector circuli C X V æqualis sit sectori C R V, erit etiam ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F, atquè itâ punctum trajectory I invenietur capiendū sectorem C X V ad sectorem C S V, in datâ ratione C E ad C F, et in radio C X, capiendū C I = C T. Idem eodem modo demonstratur in casu 3<sup>o</sup>.

440. Hinc si (juxta constructionem Corol. 3. Prop. 41.) describatur curva V I capiendū angulum V C I sectori conico V C R proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendū sectorem circuli C X V ad sectorem conicum V C R in datâ ratione, et C I = C T, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundum lineam ipsi C V perpendiculararem projici debet ut in trajectoryâ descriptâ V I progrediatur. Nam sit V S hyperbola quævis, centro C, semiaxe transverso C V = r, semiaxe conjugato C F descripta, data erit ratio sectoris circuli C X V, ad sectorem hyperbolicum C S V, (ex hyp.) seu (439) ratio C E ad datam C F; ergo dabitur C E, seu c; est autem in cas. 2<sup>o</sup>. (430, 436)  $c c = a a - r r$  adeoque  $a a = r r + c c$ ; et hinc datis r et c, dabitur a, seu A C, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, et vi centripetâ, datur rectangulum P Q R V, æquale areâ A B L V, et indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectory V I, per sectores ellipticos descripta fuerit, similiter invenietur c;

est autem in casu 3<sup>o</sup>. (437)  $c = \frac{r e}{b}$ , et  $r r e e$

$$- f^4 = b b r r, \text{ adeoque } b = \frac{r e}{c}, b b = \frac{r r e e}{c c}, \text{ et } b b = \frac{r r e e - f^4}{r r} = \frac{r r e e}{c c};$$

$$\text{quare } c c r r e e - r^4 e e = f^4 c c, \text{ et } e e = \frac{f^4 c c}{c c r r - r^4} = \frac{f^4}{r r} \times \frac{c c}{c c - r r}, \text{ cum igitur}$$

datæ sint c, et r, ac  $\frac{f^4}{r r} = \text{areâ datâ O V L o}$  (429); dabitur e e, seu rectangulum P Q R V (437) et hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu c majorem esse debere radio r, seu C V, alioquin problema esset impossibile, cùm sit  $e = \frac{f f}{r} \times$

$$\frac{c}{\sqrt{c c - r r}}.$$

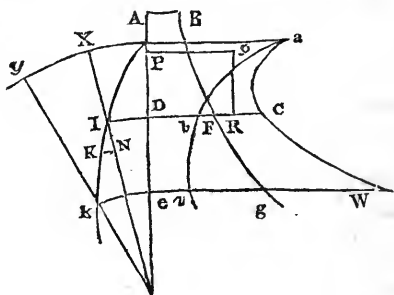
441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, seu directionem in contrariam mutet, et corpus per rectam V M ad C V perpendiculararem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectory V K I describat. Sit ut in casu 3<sup>o</sup>. (437) P V spatium per quod vi centrifugâ constante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, et R V ad L V ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, et rectangulum P R Q V, dicatur e e; velocitas projectionis in V, erit ut e, (per Cor. 1. Prop. 39.) et quoniam velocitas in recessu a centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ, ut



## PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

*Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.*

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I secundum lineolam I K, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere posset in D: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I, ut D R ad D F. Pergat autem corpus versus k; centroque C et intervallo C k describatur circulus k e occurrens rectæ P D in e, et erigantur curvarum B F g, a b v, a c w ordinatim applicatæ e g, e v, e w. <sup>(y)</sup> Ex dato rectangulo P D R Q, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitur, datur curva linea B F g, per constructionem Problematis XXVII. et ejus Corol. 1. <sup>(z)</sup> Deinde ex dato angulo C I K datur proportio nascentium I K, K N, et inde, per constructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unâ cum curvis lineis a b v, a c w: ideoque, completo tempore quovis D b v e, datur tum corporis altitudo C e vel C k, tum area D c w e, eique æqualis sector X C y, angulusque I C k, et locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. e. i.



<sup>(y)</sup> \* Ex dato rectangulo P D R Q, &c. Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea B F G, (per constr. 1<sup>m</sup>. partis Prop. 39.) Dato rectangulo P D R Q, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D, (per Cor. 1. Prop. 39.) dato autem loco A, et descriptâ curvâ B F g, describi poterit altera curva V L M, (per constr. et fig. 2<sup>m</sup>. partis Prop. 39.)

<sup>(z)</sup> \* Deinde. Cùm sit I K ad K N, ut sinus totus ad sinum anguli dati N I K, (per Corol. 2. Prop. 41.) dabitur quantitas constans Q, unâ cum curvis lineis a b v, a c w, est enim I K : K N =  $\sqrt{A B F D}$  (sive  $\sqrt{P D R Q}$ ) : Z; est ergo data Z (per constr. Probl. 28. et not. 418.) et  $Z = \frac{Q}{A}$  sive  $A \times Z = Q$  unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates  $\frac{Q}{A}$  et  $\frac{Q \times C \times X^2}{2 A^2 \times \sqrt{A B F D - Z Z}}$  quæ sunt ordinatæ curvarum a b v, a c w.



Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

## SECTIO IX.

*De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.*

## PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

(<sup>a</sup>) *Efficiendum est ut corpus in trajectoryâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoryâ quiescente.*

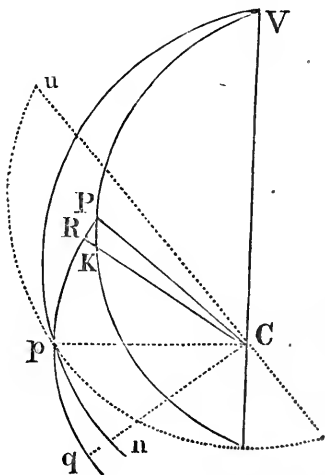
In orbe V P K positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K. A centro C agatur semper C p, quæ sit ipsi C P æqualis, angulumque V C p angulo V C P proportionalem constituat; et (<sup>b</sup>) area,

(<sup>a</sup>) \* *Efficiendum est.* Sit V P K quælibet immota trajectorya quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versus K, invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori similis et æqualis, intereadum hæc ipsa figura u p, circa C revolvitur in uno eodemque plano, ita ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quiescente V P, aliud corpus p, similem et æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

443. Si fuerit C V ad trajectoryam V P K in puncto V perpendicularis, hoc est, si fit C V linea apsidum in orbe quiescente, et correspondens C u linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, et corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

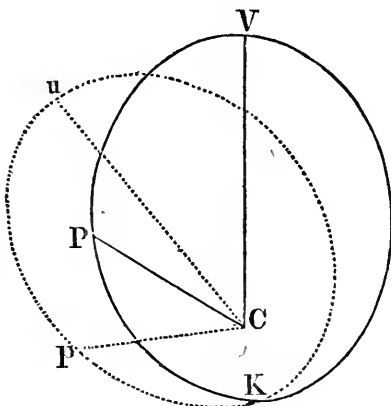
(<sup>b</sup>) \* *Et area quam linea C p, describit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens describit, centro C, intervallo C P, vel C p, describatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem quiescentem V P K secans in K, et radius C q, trajectoryam V p n, secans in n, sicutque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id est, arcus P K, p n, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcibus P R, p q, sectores P C K, p C n, æquales sunt factis  $\frac{1}{2} P C \times P R$ ,  $\frac{1}{2} p C \times p q$ ; adeoque ob  $p C = P C$  sectores illi sunt inter se ut arcus P R, p q, seu ut anguli P C K, p C n; sed quoniam angulus V C K, est ad angulum V C n, in datâ ratione anguli V C P, ad angulum V C p (per hyp.) erit dividendo angulus V C K — V C P, ad angulum V C n — V C p, hoc est, angulus P C K, ad angulum p C n, in datâ ratione anguli V C P

ad V C p, atquæ adeò sector P C K, ad sectorem p C n, in eâdem ratione datâ. Undè (per



Cor. Lem. 4.) totus sector V p C, est ad totum sectorem V P C, eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector V p C, est ut sector V P C, proindeque (per Prop. 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (per Prop. 2.) quod corpus p, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvitur in curvâ lineâ V p n, quam punctum p perpetuò tangit. Porro dato orbe V P K, et virium centro C, datur longitudo et positio lineæ C P, per (superiorem Ncw. constr.) ideoque et lineæ C p, et hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoryâ

quam linea  $Cp$  describit, erit ad aream  $VCP$ , quam linea  $CP$  simul describit, ut velocitas lineæ describentis  $Cp$  ad velocitatem lineæ describentis  $CP$ , hoc est, ut angulus  $VCP$  ad angulum  $VCP$ , ideoque in datâ ratione, et propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea  $Cp$  in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unâ cum puncto  $p$  in curvâ illâ lineâ quam punctum idem  $p$  ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus  $VCu$  angulo  $PCp$ , et linea  $Cu$  lineæ  $CV$ , atque figura  $uCP$  figuræ  $VCP$  æqualis, et corpus in  $p$  semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis  $uCP$ , eodemque tempore describet arcum ejus  $up$  quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem et æqualem  $VP$  in figurâ quiescente  $VPK$  describere potest. Quærat igitur, per Corollarium quintum Propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum  $p$  describit in plano immobili, et solvetur problema. Q. e. f.



## PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

*Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.*

Partibus orbis quiescentis  $VP$ ,  $PK$  sunt similes et æquales orbis re-

$Vpn$ , adeoque et ipsa trajectory datur. Inveniri igitur potest (per Cor. 5. Prop. 6.) lex vis centripetæ quâ corpus  $p$ , in trajectory illâ  $Vpn$  revolvi potest.

Quoniam autem angulus  $VCP$  æqualis est angulo  $vCp$  (per constr.) erit quoque angulus  $VCV$  æqualis angulo  $PCp$ , adeoque datâ  $Cp$ , magnitudine et positione, facile invenitur positio lineæ apsidum  $Cv$  in orbe mobili  $Vp$ : Fiat enim angulus  $VCV$  angulo  $PCp$ , et li-

nea  $Cv$  lineæ  $CV$ , atque figura  $uCP$ , figuræ  $VCP$  similis et æqualis, et corpus unâ cum puncto  $p$ , semper latum et figuram immotam  $Vpn$  describens, describit etiam perimetrum  $up$ , figuræ revolventis  $uCP$ , eodemque tempore describit arcum ejus  $vp$ , quo corpus aliud  $P$  arcum ipsi similem et æqualem  $VP$ , in figurâ quiescente  $VPK$ , describere potest. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectory  $Vpn$  determinantem, in Comm. Paris. 1705



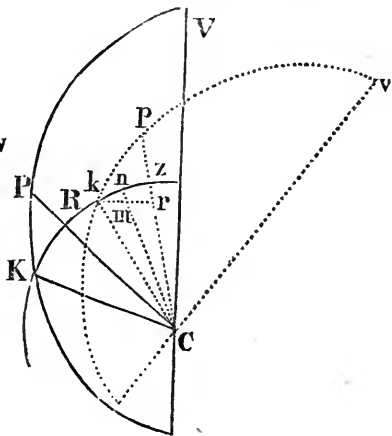
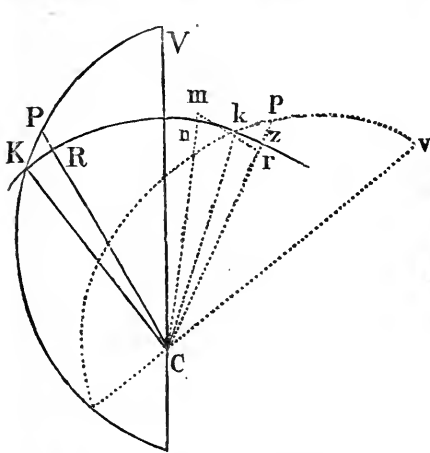
gulus  $V C p$  ad angulum  $V C P$ , sitque  $n C$  æqualis  $k C$ , et corpus  $p$  completo illo tempore <sup>(d)</sup> reverâ reperietur in  $n$ ; <sup>(e)</sup> ideoque vi majore urgetur quam corpus  $P$ , si modò angulus  $n C p$  angulo  $k C p$  major est, id est si orbis  $u p k$  vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea  $C P$  in consequentia fertur; et vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque

<sup>(d)</sup> \* *Reverâ reperietur in puncto n.* Est enim angulus  $p C k = P C K$  (per hyp.) et si fuerit  $n$  locus corporis  $p$ , erit (per Prop. 43.) angulus  $p C n$ , ad angulum  $p C k$ , ut angulus  $V C p$ , ad angulum  $V C P$ , et puncta  $C, n, m$ , jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis  $p C n, P C K$ , perpendicularia  $r m, R K$ , sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus  $C R, C r$  descripti, seu ut anguli  $m C r, K C R$ , (per Lem. 7.) Est ergò angulus  $m C p$ , ad angulum  $K C P$ , seu  $k C p$ , ut  $m r$ , ad  $K R$ , seu  $k r$ , hoc est, ut angulus  $V C p$ , ad angulum  $V C P$ , sive, ut angulus  $p C n$ , ad angulum  $p C k$ , (per constr.) quare angulus  $m C p = p C n$ , et hinc puncta  $C, n, m$ , jacent in unâ rectâ.

<sup>(e)</sup> 444. *Ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modò angulus n C p, angulo k C p major; vi minore, si angulus m C p, angulo k C p minor; et vi æquali, si angulus m C p,*

445. Porro angulus  $m C p$ , angulo  $k C p$  seu  $K C P$  major est, si orbis  $v p k$ , vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm sit dupla ejus quâ linea  $C P$  in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus  $v C V$ , est plusquam duplo major angulo  $V C P$ , seu  $v C p$ , adeoque angulus  $V C p$ , major angulo  $V C P$ , seu  $v C p$ , et hinc angulus  $p C m$ , major angulo  $p C k$ , cum sit angulus  $p C m$ , ad angulum  $p C k$ , ut  $V C p$ , ad  $V C P$ .

446. Si orbis  $v p k$ , movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea  $C P$ , in consequentia fertur, erit angulus  $V C p = V C P$ , cumque sit etiam  $C p = C P$ , corpus  $p$  describet orbem immotum  $V p$ , similem et æqualem orbi  $V P K$ . In hoc casu corpus  $p$ , non fertur ab  $V$ , versùs  $P$ , sed in partem oppositam ut patet.



angulo  $k C p$  æqualis. Nam in 1<sup>o</sup>. casu linea  $C m$ , major est quam  $C n$ , et punctum  $m$  extra peripheriam circuli radio  $C k$ , vel  $C n$ , descripti cadit, adeoque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus  $p$ , adhuc describat  $m n$ . In 2<sup>o</sup>. casu  $C m$ , minor est quam  $C n$ , puncto  $m$ , cadente inter puncta  $k$ , et  $r$ , in lineâ  $k r$ . In 3<sup>o</sup>. casu  $C m = C n$ , coincidentibus punctis  $m, n, k$ .

447. Si orbis  $v p k$ , movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea  $C P$  in consequentia fertur, erit angulus  $m C p$ , angulo  $k C p$  minor. In hoc enim casu angulus  $V C v$  minor est duplo angulo  $V C P$ , vel  $v C p$ , adeoque angulus  $V C p$ , minor angulo  $V C P$ , vel  $v C p$ , et hinc angulus  $m C p$ , minor angulo  $k C p$  (per constr.)



$\frac{r k q}{2 k C}$ , vel ut  $m k \times m s$  ad  $r k$  quadratum; hoc est, si capiantur datæ

quantitates  $F, G$  in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $V C P$  ad angulum  $V C p$ , ut  $G G - F F$  ad  $F F$ . Et <sup>(i)</sup> propterea, si centro  $C$  intervallo quovis  $C P$  vel  $C p$  describatur sector circularis æqualis areæ toti  $V P C$ , quam corpus  $P$  tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus  $P$  in orbe immobili et corpus  $p$  in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area  $V P C$  uniformiter describere potuisset, ut  $G G - F F$  ad  $F F$ . Namque sector ille et area  $p C k$  sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

*Corol. 2.* Si orbis  $V P K$  ellipsis sit umbilicum habens  $C$  et apsidem summam  $V$ ; eique similis et æqualis ponatur ellipsis  $u p k$ , ita ut sit semper  $p C$  æqualis  $P C$  et angulus  $V C p$  sit ad angulum  $V C P$  in datâ ratione  $G$  ad  $F$ ; pro altitudine autem  $P C$  vel  $p C$  scribatur  $A$ , et pro ellipseos latere recto ponatur  $2 R$ : erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut  $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$  et contra. Exponatur enim

vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem  $\frac{F F}{A A}$ , et vis in

$V$  erit  $\frac{F F}{C V \text{ quad.}}$ . <sup>(k)</sup> Vis autem quâ corpus in circulo ad distantiam

$m n : Z r = m k \times m s : k r^2$ , ob  $m t = 2 k C$ . Si verò capiantur duæ quantitates  $G, F$ , in eâ ratione ad invicem quam habet angulus  $V C p$ , ad angulum  $V C P$ , seu quam habet  $m r$ , ad  $k r$ , erit  $m k \times m s : k r^2 = G G - F F : F F$ ; ut ex suprâ demonstratis liquet, ergo  $m n : Z r = G G - F F : F F$ .

<sup>(i)</sup> • Et propterea si centro  $C$ . Corpus  $P$ , in orbitâ  $V P K$  revolvens dato tempore datum sectorem  $P C K$ , radio ad centrum  $C$  ducto describit (per Prop. 1.) et corpus in circulo radio  $C K$  descripto uniformiter revolvens, et arcum  $R K$ , seu sectorem  $C R K = C P K$ , describens eodem tempore quo corpus  $P$  describit arcum  $P K$ , seu sectorem  $C P K$ , dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus  $P$ , in orbitâ  $V P K$ , et corpus in circulo prædicto revolvantia, radiis ad centrum  $C$  ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. Et propterea si centro  $C$ , intervallo  $C P$ , vel  $C p$ , describatur, &c.

<sup>(k)</sup> • Vis autem quâ corpus in circulo, &c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati con-

stanti divisæ per quadratum distantiae a foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum  $F F$  cujus latus  $F$  est prinâ ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ expriment rationem anguli  $V C P$  ad angulum

$V C p$ , erit vis in  $V = \frac{F F}{V C^2}$ . Sit corpus cir-

câ centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam  $C V$ , eâdem velocitate quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside  $V$ , sumantur in circulo et in ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex hypoth.) et eorum sagittæ erunt inter se ut vires centrales (per Corol. 4. Prop. 1.): in ellipsis autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (et iis annumeratur circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ et directè ut quadrata perpendiculari ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside ellipseos et circuli, illa perpendiculara sunt ipsius arcus, ideoque sunt æqualia; ergo latera recta hujus ellipsis et bujus circuli erunt inversè ut sagittæ

C V eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in V, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum C V, ideoque valet  $\frac{R F F}{C V \text{ cub.}}$ : et vis, quæ sit ad hanc ut G G

— F F ad F F, valet  $\frac{R G G - R F F}{C V \text{ cub.}}$ :

estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipsi immotâ V P K, et corpus p in ellipsi mobili u p k revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine

C V ut  $\frac{1}{A \text{ cub.}}$  ad  $\frac{1}{C V \text{ cub.}}$ , eadem differentia in omni altitudine A valebit  $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$ . Igitur ad vim  $\frac{F F}{A A}$ ,

quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili V P K, addatur excessus  $\frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$ ; et componetur vis tota  $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$

quâ corpus in ellipsi mobili u p k iisdem temporibus revolvi possit.

*Corol. 3. (!)* Ad eundem modum colligetur quòd, si orbis immobilis

arcuum sive inversè ut vires centrales; latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque lateris recti est *vis quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur*, &c. Reliqua demonstratio est plana.

(!) *Ad eundem modum*, &c. Si corpus revolvatur in ellipsi vi centripetâ tendente ad centrum ellipseos, vis centralis est directè ut distantia a centro, ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito 2 T pro axe transverso et 2 R pro latere recto, sit ea quantitas constans  $\frac{F F}{T^3}$ .

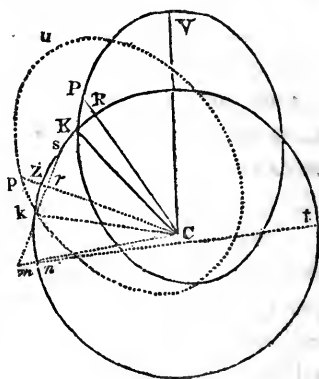
vis in V erit  $\frac{F F \times C V}{T^3}$  vel quoniam C V =

T, erit  $\frac{F F}{T^2}$  in aliis verò omnibus punctis erit  $\frac{F F \times A}{T^3}$ .

Sit corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam C V, quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eadem velocitate feratur quâ corpus in ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversæ, sumantur in eo circulo et in extremitate axis transversæ ellipseos arcus quatinusimè eo-

dem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, et eorum sagittæ erunt ut vires centrales quibus corpora in circulo et ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in ellipsis autem diversis (et iis annumeratur circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantis æqualibus a centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore descriptæ, et directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus æquales et perpendiculares in lineam ad centrum ductam, et distantia a centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in ellipsi et in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus ellipseos et circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in ellipsi et circulo sunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversæ, sive inversè ut latus rectum ad axem transversum, ergo 2 T : 2 R (sive T : R)

=  $\frac{F F}{T^2}$ ; ad vim in circulo quæ itaque erit  $\frac{R \times F F}{T^3}$  sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili et immobili, ut F F ad G G —





V P K ellipsis sit centrum habens in virium centro C; eique similis, æqualis et concentrica ponatur ellipsis mobilis u p k; sitque 2 R ellipses hujus latus rectum principale, et 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus V C p semper sit ad angulum V C P ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili et mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut  $\frac{F F A}{T \text{ cub.}}$  et  $\frac{F F A}{T \text{ cub.}} + \frac{R G G - R F F}{A \text{ cub.}}$  respectivè.

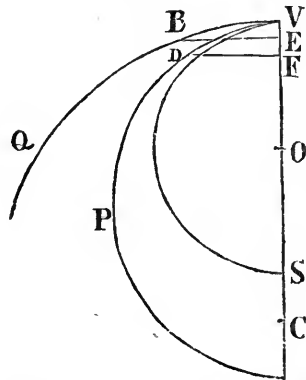
*Corol. 4.* Et universaliter, si corporis altitudo maxima C V nominetur T, et radius curvaturæ quam orbis V P K habet in V, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, et vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili V P K revolvi potest in loco V dicatur  $\frac{V F F}{T T}$ , atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine C P nominatâ A, et capiatur G ad F in datâ ratione anguli V C p ad angulum V C P: erit <sup>(m)</sup> vis centripeta, quâ corpus idem eosdem motus in eâdem trajectoriâ u p k circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium X +  $\frac{V R G G - V R F F}{A \text{ cub.}}$ .

F F, ergo illa differentia est  $\frac{R G G - R F F}{T^3}$ , hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo A<sup>3</sup> : C V<sup>3</sup> (sive T<sup>3</sup>) =  $\frac{R G G - R F F}{T^3}$  :  $\frac{R G G - R F F}{A^3}$ , cum ergo vis in orbe immobili sit ut  $\frac{F F A}{T^3}$  in orbe mobili erit  $\frac{F F A}{T^3} + \frac{R G G - R F F}{A^3}$ . Q. e. d.

<sup>(m)</sup> \* Erit vis centripeta. Ut hæc commodè demonstrarentur adhibendum Lemma sequens.

448. *Lemma.* Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam V P, vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo V B Q, ad eandem distantiam C V, eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia C V ad V O radium circuli V D S, trajectoriam V P osculantis in V. Capiantur in circulo V B Q et in trajectoriâ V P arcus quam minimi et æquales V B, V D, et ex punctis B et D ad rectam C V demissa intelligantur perpendicularia B E, D F; arcus evanescentes V B, V D eodem tempore a corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicularia B E, D F æqualia (per Lem. VII.) Quoniam autem arcus evanescens V D usurpari potest pro arcu circuli curvam V P osculantis in V, erit ex naturâ circuli V F : D F = D F :

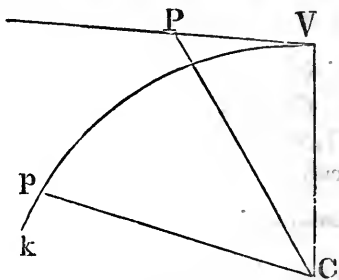
V O + F O, seu 2 V O, adeoque D F<sup>2</sup> = 2 V O × V F, et similiter B E<sup>2</sup> = 2 V C × V E = 2 V O × V F; undè V F : V E = V C : V O; sed vis centripeta corporis arcum



V D describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum V B describentis ut V F ad V E, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa C V ad radium V O circuli osculatoris in V. Q. e. d.

*Corol. 5.* Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, et inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

*Corol. 6.* Igitur si ad rectam C V positione datam erigatur perpendicularum V P longitudinis indeterminatæ, jungaturque C P, et ipsi æqualis agatur C p, constituens angulum V C p, qui sit ad angulum V C P in datâ ratione; vis quâ corpus gyron potest in curva illa V p k quam punctum p perpetuò tangit, erit reciproçè ut cubus altitudinis C p. Nam <sup>(n)</sup> corpus P per vim inertiae, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ V P. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis C P vel



449. *Corol. 1.* Si radius VO circuli trajectorym VP osculant in apside V dicatur R, distantia CV, T, distantia C P, A, vis centripeta in V,  $\frac{V F F}{T T}$ ,

hæc erit ad vim centripetam in circulo V Q, ad eandem distantiam C V eadem cum velocitate descripto ut T ad R, (448) hæc ergo erit  $\frac{V R F F}{T^3}$ , quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V et u, orbis immobilis V P, et orbis mobilis u p, ut F F ad G G — F F (per Cor. 1. Newt.) ideoque differentia illa erit  $\frac{V R G G - V R F F}{T^3}$  quæ erit ad differenti-

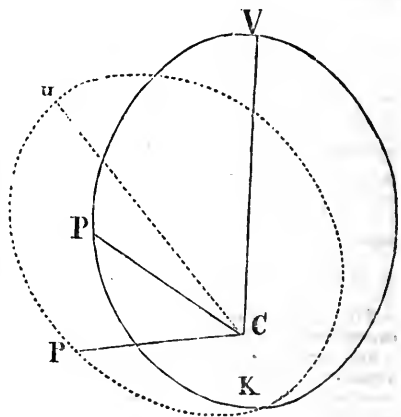
am in aliis locis P ut A<sup>3</sup> ad T<sup>3</sup>, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili et immobili  $\frac{V R G G - V R F F}{A^3}$ .

Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus Prop. 25. Lib. 1. Phoronomia.

450. *Corol. 2.* Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis V P, dicatur X, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis u p erit  $X + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$ , Q. e. d.

451. *Corol. 3.* Si orbitæ V P et u p sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240) radius osculi R æqualis dimidio lateri recto ellipsos V P, vel u p: et (per Prop. XI.)  $X = \frac{V F F}{T T} = T T : A A$ , adeoque  $X = \frac{V F F}{A A}$ , Ergo (450) vis in orbitâ mobili erit  $\frac{V F F}{A A} + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$ , et divisus omnibus terminis per V ut  $\frac{F F}{A A} + \frac{R G G - R F F}{A^3}$ ;

et si vis centralis ad centrum ellipseos dirigatur erit  $X : \frac{V F F}{T T} = A : T$  et  $X = \frac{V F F \times A}{T^3}$



et vis in orbita mobili erit  $\frac{V F F \times A}{T^3} + \frac{V R G G - V R F F}{A^3}$  et divisus terminis per V erit  $\frac{F F \times A}{T^3} + \frac{R G G - R F F}{A^3}$ ; sicut in Cor. 3. et 4. Newt. inventum fuerat.

<sup>(n)</sup> \* Nam corpus P. Linea V P considerari potest tanquam trajectory immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est, et radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (per Cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectory

C p, reciprocè proportionalis, et (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam V p k. Est (°) autem hæc curva V p k eadem cum curvâ illâ V P Q in Corol. 3. Prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(P) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(<sup>q</sup>) Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in

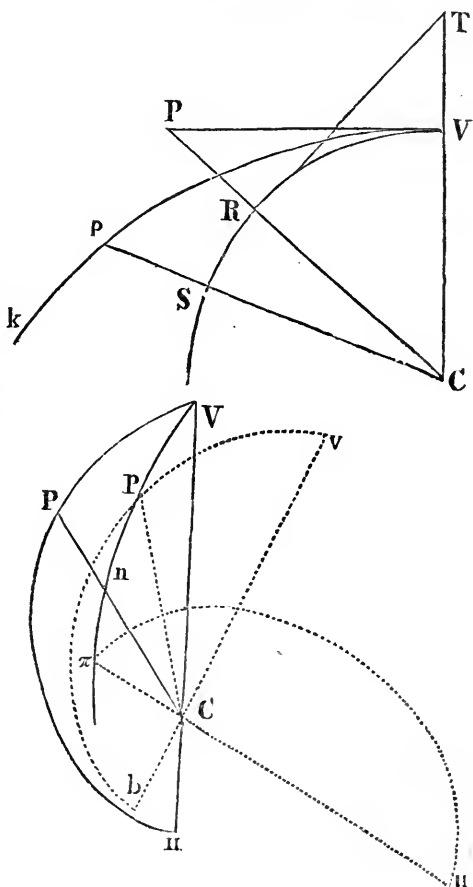
mobilis, æqualis  $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ , adeo-  
 que ob datam quantitatem  $VRGG - VRFF$ ,  
 erit X, seu vis in p, ut  $\frac{1}{A^3}$ .

proximè accedet, nam si ellipsis  $V P \Pi$ , in circulum perfectum mutetur, orbis  $V p n \pi$  fit quoque circulus.

(<sup>q</sup>) \* *Problema solvitur arithmetice.* Revol.

(<sup>o</sup>) • *Est autem hæc curva V p k eadem, &c.* Nam si centro C intervallo C V describatur circulus V R S quem recta C P secat in R, recta C p, in S, sitque angulus S C V ad angulum R C V in datâ ratione, erit quoque sector S V C ad sectorem R V C in datâ illâ ratione, et ductâ per punctum R tangente R T, quæ radio C V producto occurrat in T, ejusdem anguli R C V secantes C P, C T erunt æquales, atquæ adeo curva V p k, eadem cum curvâ V P Q, in Corol. 3<sup>o</sup>. Prop. 41. inventâ, in quâ recta C T, est semper æqualis abscissæ C T, et angulus V C p est semper sectori V C R proportionalis.

(P) \* *Orbium qui sunt, &c.* Iisdem positis quæ in Propositione 44. et ejus Corollaris 1. et 2. sit V p n orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, et V  $\Pi$ , v b, ellipseon immobilis et mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P  $\Pi$ , quàm in orbe V p n  $\sigma$ , et esse  $\sigma$  apsidem imam in orbe V p n  $\sigma$  si  $\pi$  fuerit C  $\sigma$  = C b = C  $\Pi$ , in quâ hypothesis corpus p pervenit ad locum  $\sigma$ , ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam  $\Pi$  et in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n  $\sigma$ , puncta p, b,  $\sigma$ , coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n  $\sigma$ , quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u C b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C  $\Pi$ , 180°, ad angulum V C  $\sigma$ ; quod si ellipsis V P  $\Pi$ , sit circulo inaximè finitima, orbis V p n  $\sigma$  ad circuli formam quan-



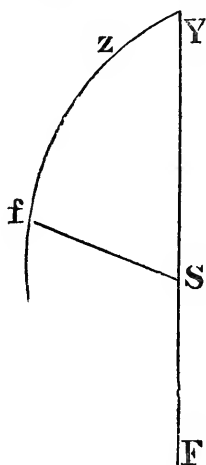
ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel. 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, et quærendo apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbis autem eandem acquirant formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V apsis summa, et scribantur T pro altitudine maximâ C V, A pro altitudine quavis aliâ C P vel C p, et X pro altitudinum differentiâ C V — C P; et vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corol. 2.) revolvente movetur,

quæque in Corol. 2. erat ut  $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$ , id est ut  $\frac{FFA + RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$ , substituendo T — X pro A, erit ut

$\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A \text{ cub.}}$ . Reducenda similiter est vis alia

quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A cub. et numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

vatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe.



Umbilico S, et axe transverso Y S F = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses immobilis et mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hac ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam des-

cribit eâ ratione quam exposuimus Prop. 43. et inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n  $\sigma$  (fig. superiori) qui omnes orbis ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis et æqualis fiat, ac quærendo apsides V  $\sigma$ , vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n  $\sigma$ . Porro si supponamus orbem V p n  $\sigma$ , similem et æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut  $\frac{FF}{AA}$ , et vis centripeta in loco quovis Z

$$\text{orbis Y Z f, vel in loco P, orbis V p n } \sigma, \text{ ut } \frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3} = \frac{FFA + RGG - RFF}{A^3} = \frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3},$$

substituendo T — X pro A in numeratore, et P pro numeratore toto. Unde si quantitas  $\frac{Q}{A^3}$  vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f

exponat, eaque sit data, erit  $\frac{P}{A^3}$  ad  $\frac{Q}{A^3}$  in datâ

ratione. Sit illa ratio 1 ad B, et erit  $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$ ,

et P B — Q = 0. Loco A, in quantitate Q, substituitur T — X, et æqualitatis P B — Q = 0, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus

(<sup>r</sup>) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ , sive (scribendo  $T - X$  pro  $A$  in numeratore) ut  $T \text{ cub.} - 3 T T X + 3 T X X - X \text{ cub.}$ ;  
 $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ ; et collatis numeratorum

terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, et non datis cum non datis, fiet  $R G G - R F F + T F F$  ad  $T \text{ cub.}$  ut  $- F F X$  ad  $- 3 T T X + 3 T X X - X \text{ cub.}$  sive ut  $- F F$  ad  $- 3 T T + 3 T X - X X$ . Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo; et ob factas  $R, T$  æquales, atque  $X$  in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt  $R G G$  ad  $T \text{ cub.}$  ut  $- F F$  ad  $3 T T$ , seu  $G G$  ad  $T T$  ut  $F F$  ad  $3 T T$ , et vicissim  $G G$  ad  $F F$  ut  $T T$  ad  $3 T T$ , id est, ut 1 ad 3; ideoque  $G$  ad  $F$ , hoc est angulus  $V C p$  ad angulum  $V C P$ , ut 1 ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum  $V C P$  (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descen-

dendo conficiet angulum  $V C p$  graduum  $\frac{180}{\sqrt{3}}$ : id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, et orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur ni orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam et apsidem

non reperitur quantitas variabilis  $X$  erunt simul nihilo æquales, et termini non dati, seu in quibus variabilis  $X$  invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque indè determinabitur ratio  $G$  ad  $F$  seu anguli  $V C p$  ad angulum  $V C P$ , faciendo ut sint termini dati in quantitate  $P$  ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate  $Q$ , ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(<sup>r</sup>) \* *Exemplum* 1<sup>um</sup>. Ponamus vim centripetam in orbe  $Y Z f$  uniformem seu constantem esse, ideoque ut 1, seu ut  $\frac{A^3}{A^3}$ , erit  $Q = A^3 =$

$T^3 - 3 T T X + 3 T X X - X^3$ , et  $P B = B R G G - B R F F + B T F F - B F F X$  atque adeò  $B R G G - B R F F + B T F F - B F F X = B F F X - T^3 + 3 T T X - 3 T X X + X^3 = 0$ , et termini dati  $B R G G - B R F F + B T F F - T^3 = 0$ , seu  $B R G G - B R F F + B T F F = T^3$ , et termini non dati  $- B F F X +$

$3 T T X - 3 T X X + X^3 = 0$ , seu  $B F F = 3 T T - 3 T X + X^2$ , unde hæc proportio deducitur  $B R G G - B R F F + B T F F : B F F = T^3 : 3 T T - 3 T X + X^2 = R G G - R F F + T F F : F F$ . Jam cum orbis  $Y Z f$ , ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo et ob factas  $R$  et  $T$  æquales, atque  $X = 0$ , erit  $X^2 = 0$ ,  $3 T X = 0$ ,  $R F F = T F F$ , et hinc  $T^3 : 3 T T = R G G : F F = T G G : F F$ , et  $T^2 : 3 T^2 = 1 : 3 = G G : F F$ , adeoque  $G : F = 1 : \sqrt{3}$ , hoc est, angulus  $V C p$ , est ad angulum  $V C P$ , ut 1, ad  $\sqrt{3}$ . Ergo cum corpus in ellipsi immobili  $V P \Pi$ , ab apside summâ  $V$  ad apsidem imam  $\Pi$  descendendo, conficiat angulum  $V C \Pi$  grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili  $u p b$ , atque adeò in orbe immobili  $V p n \pi$ , seu  $Y Z f$ , ab apside summâ  $V$  vel  $Y$ , ad apsidem imam  $\pi$  vel  $f$ , descendendo conficiet angulum  $V C \pi$ , vel  $Y S f$  grad.  $\frac{180}{\sqrt{3}}$ .

imam conficiet semper angulum  $\frac{180}{\sqrt{3}}$  graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, et inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; et sic deinceps in infinitum.

*Exempl. 2.* Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis  $A$  dignitas quâlibet  $A^{n-3}$  seu  $\frac{A^n}{A^3}$ : ubi  $n-3$  et  $n$  significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille  $A^n$  seu  $T-X|^n$  in seriem indeterminatam per (\*) methodum nostram serierum convergentium reductus, evadit  $T^n - n X T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X X T^{n-2}$ , &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius  $R G G - R F F + T F F - F F X$ , fit  $R G G - R F F + T F F$  ad  $T^n$  ut  $- F F$  ad  $- n T^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X T^{n-2}$ , &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circulem accedunt, fit  $R G G$  ad  $T^n$  ut  $- F F$  ad  $- n T^{n-1}$ , seu  $G G$  ad  $T^{n-1}$  ut  $F F$  ad  $n T^{n-1}$ , et vicissim  $G G$  ad  $F F$  ut  $T^{n-1}$  ad  $n T^{n-1}$  id est ut 1 ad  $n$ ; ideoque  $G$  ad  $F$ , id est angulus  $V C p$  ad angulum  $V C P$ , ut 1 ad  $\sqrt{n}$ . Quare cum angulus  $V C P$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus  $V C p$ , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati  $A^{n-3}$  proportionali describit, æqualis angulo graduum  $\frac{180}{\sqrt{n}}$ ; et hoc angulo repetito angulus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, et sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut  $A$  seu  $\frac{A^4}{A^3}$ , erit  $n$  æqualis 4 et  $\sqrt{n}$  æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam et apsidem imam æqualis  $\frac{180}{2}$  gr. seu 90 gr. Com-

(\*) \* *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium, et theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex Elementis Algebræ clarissimorum Virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex Analysisi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cum hic satis sit duos priores terminos dignitatis  $(T-X)^n$

reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius  $X$  dignitas primâ altior, facile demonstratur ex dignitatibus per continuum radices multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse  $T^n - n X T^{n-1}$ . Ut si fuerit  $n = 2$ , duo priores termini dignitatis  $(T-X)^2$ , erunt  $T^2 - 2 X T X$ ; si  $n = 3$ , erunt  $T^3 - 3 X X T^2$ , et ita porro; atque hinc patet

pletâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, et completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam, et sic deinceps per vices in infinitum. Id <sup>(t)</sup> quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproçè ut distantia, id est directè ut  $\frac{1}{A}$  seu  $\frac{A^2}{A^3}$ , erit n æqualis 2, ideo-

que inter apsidem summam et imam angulus erit graduum  $\frac{180}{\sqrt{2}}$  seu 127 gr. 16 m. 45 sec. et propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam et ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproçè ut latus quadratoquadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproçè ut  $A^{\frac{11}{4}}$ , <sup>(u)</sup> ideoque directè ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$  seu ut  $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$  erit n æqualis  $\frac{1}{4}$ ,

et  $\frac{180}{\sqrt{n}}$  gr. æqualis 360 gr. et propterea corpus de apside summâ discedens et subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: et sic per vices in æternum.

*Exempl. 3.* Assumentes m et n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, et b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam

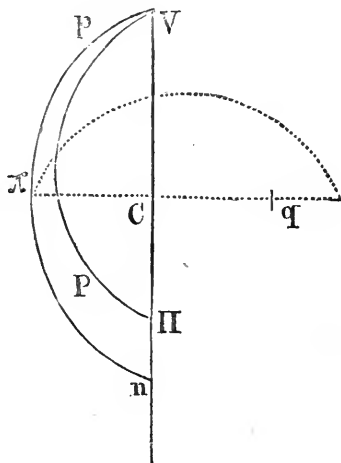
quàm compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales R F F, T F F, in formulâ  $R G G - R F F + T F F - F F X$ , deleri; undè tantummodo conferendus terminus datus R G G cum aliis terminis datis, et terminus non datus  $- F F X$  cum aliis non datis.

<sup>(t)</sup> \* Id quod etiam ex Prop. X., &c. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili V p n, cujus centrum est in centro virium C, axis transversus V n, axis conjugatus p q, apsidæ summæ duæ V, n, imæ p, q; ellipseos autem mobilis V P n, umbilicus erit C, axis transversus V n = V C + C n.

<sup>(u)</sup> \* Ideoque directè ut  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ , seu ut  $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ ,

cum sit  $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$ , et proindè est  $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} =$

$A^{\frac{1}{4}}$ , atquè itâ  $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ .



esse ut  $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$ , id est, ut  $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A \text{ cub.}}$

seu (\*) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} b X X T^{m-2}}{A \text{ cub.}}$$

$$+ \frac{\frac{n n - n}{2} c X X T^{n-2}, \&c.}{A \text{ cub.}} \text{ et collatis numeratorum terminis, fiet}$$

$$R G G - R F F + T F F \text{ ad } b T^m + c T^n, \text{ ut } - F F \text{ ad } - m b T^{m-1} - n c T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} b X T^{m-2} + \frac{n n - n}{2} c X T^{n-2}, \&c.$$

Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit  $G G \text{ ad } b T^{m-1} + c T^{n-1}$ , ut  $F F \text{ ad } m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$ , et vicissim  $G G \text{ ad } F F \text{ ut } b T^{m-1} + c T^{n-1} \text{ ad } m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$ . Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam  $C V$  seu  $T$  arithmeticè per unitatem, fit  $G G \text{ ad } F F \text{ ut } b + c \text{ ad } m b + n c$ , ideoque ut  $1 \text{ ad } \frac{m b + n c}{b + c}$ . Unde est  $G$

$$\text{ad } F, \text{ id est angulus } V C p \text{ ad angulum } V C P, \text{ ut } 1 \text{ ad } \sqrt{\frac{m b + n c}{b + c}}.$$

Et propterea cum angulus  $V C P$  inter apsidem summam et apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus  $V C p$  inter easdem ap-

sides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati  $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$  proportionali describit, æqualis angulo graduum  $180 \sqrt{\frac{b + c}{m b + n c}}$ . Et (γ)

eodem argumento si vis centripeta sit ut  $\frac{b A^m - c A^n}{A \text{ cub.}}$ , angulus inter

apsides invenietur graduum  $180 \sqrt{\frac{b - c}{m b - n c}}$ . Nec secus resolvetur

(\*) \* *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas  $\overline{T-X}^m$  evoluta, est  $T^m - m X T^{m-1}$ , &c. adeoque  $b \times \overline{T-X}^m = b T^m - m b X T^{m-1}$ , &c. et similiter  $c \times \overline{T-X}^n = c T^n - n c X T^{n-1}$ , &c. undè  $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1}$ , &c.

(γ) \* *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut  $\frac{b A^m - c A^n}{A^3}$ , id est ut  $b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n$ , seu ut

$$\frac{b T^m - c T^n - m b X T^{m-1} + n c X T^{n-1}}{A^3},$$

&c. collatis terminis fiet  $R G G$ , hoc est  $T G G \text{ ad } b T^m - c T^n$ , ut  $- F F \text{ ad } - m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$ , adeoque  $G G \text{ ad } b T^{m-1} - c T^{n-1}$ , ut  $F F \text{ ad } m b T^{m-1} - n c T^{n-1}$ , et ponendo  $T = 1$ , erit  $G G : F F = b - c : m b - n c = 1 : \frac{m b - n c}{b - c}$ , et  $G : F = 1 :$

$$\sqrt{\frac{m b - n c}{b - c}}.$$



problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvī semper debet in series convergentes denominatorem habentes A cub. Dein pars data numeratoris qui ex illā operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, et pars data numeratoris hujus R G G — R F F + T F F — F F X ad ipsius partem alteram non datam in eādē ratione ponendæ sunt : Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

*Corol. 1.* Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum ; et contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, et altitudo nominetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa

$A^{\frac{n}{m}} - 3$ , cujus index est  $\frac{n}{m} - 3$ . Id (\*) quod per exempla secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quā triplicatā altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse : (b) Corpus tali

(\*) 452. \* *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n, ad confusionem tollendam scribatur p, erit vis centripeta, ut  $A^p - 3$ , et angulus confectus in descensu ab apside summā ad apsidem imam

æqualis angulo  $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$ , adeoque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summā redit ad eandem erit  $\frac{360}{\sqrt{p}}$  in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo  $\frac{360}{n}$ , ergo

$\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360}{n}$ , et  $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{n}$ , et  $\frac{1}{p} = \frac{1}{n^2}$ , et  $\frac{n}{m} = p$ ; quare  $A^p - 3 =$

$A^{\frac{n}{m}} - 3$ .

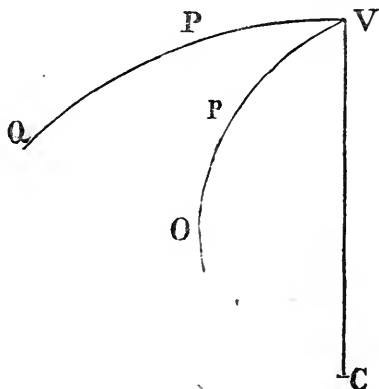
(a) 453. *Unde liquet vim illam.* Nam si vis esset ut  $\frac{1}{A^{3+q}}$ , seu ut  $A^{-3-q}$ , sitque +q

quantitas positiva, esset  $\frac{n}{m} - 3 = -3 -$

q, et  $\frac{n}{m} = -q$ , hoc est, quadratum quantitatis  $\frac{n}{m}$  negativum quod absurdum est : non potest igitur vis in majore quam in triplicatā altitudinis ratione seu in ratione  $\frac{1}{A^{3+q}}$ , in recessu a centro decrescere.

VOL. I.

(b) \* *Corpus tali vi revolvens ;* hoc est, vi quæ in recessu a centro decrescat in ratione altitudinis triplicatā deque apside discedens, &c. Sint enim ut in Corol. 3<sup>o</sup>. Prop. 41. duæ curvæ

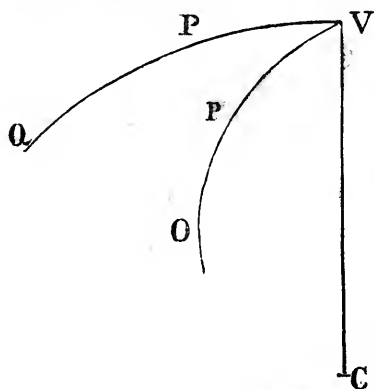


V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetā ad C tendente, et in triplicatā altitudinis ratione decrescente in recessu a centro describunt, et corpus in curvā V p O latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvā V P Q, motum a centro semper recedat ut in eodem Cor. 3<sup>o</sup>. Prop. 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvā V p O, et esse apsidem imam in curvā V P Q;

S

vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem Corol. et in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic <sup>(c)</sup> et ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At <sup>(d)</sup> si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad

Quare cum in curva V p O, corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad



centrum; in curvâ verò V P Q, de apside imâ discedens corpus ascendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hæc ratione;

Si fuerit vis ut  $\frac{1}{A^3}$ , seu ut  $A^{-3}$ , erit

$$\frac{nn}{mm} - 3 = -3, \text{ et } \frac{nn}{mm} = 0 = p \quad (452)$$

et motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$ ; motus verò angularis ab apside summâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit  $\frac{180^\circ}{0}$  quæ est quantitas infinita,

undè liquet in nostrâ hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut a summâ ad imam nunquam pervenire posse.

<sup>(c)</sup> \* Sic et ubi vis in recessu a centro. Si vis fuerit ut  $\frac{1}{A^3 + q}$ , et q, quantitas positiva, erit

(453)  $\frac{nn}{mm} = -q = p$ , et (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$ , et ab apside unâ ad alteram erit  $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$ ; quare ob imaginariam quantitatem  $\sqrt{-q}$ , impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeoque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, et ut de apside imâ discedens ac proinde a centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

<sup>(d)</sup> \* At si vis in recessu a centro. Sit vis ut  $\frac{1}{A^3 - q}$ , et q, quantitas positiva erit  $\frac{nn}{mm} - 3$

$$= -3 + q, \text{ et } \frac{nn}{mm} = q = p \quad (452). \text{ Undè}$$

motus totus angularis ab apside ad eandem erit  $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360}{n}$ , motus angularis ab apside unâ

ad alteram  $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180}{n}$ , quæ sunt quan-

titates reales et positivæ, quare in hac hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire et ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad

summam pervenire poterit. Est autem  $\frac{1}{A^3 - q}$

altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrâ  $\frac{1}{A^3 - q}$  est dignitas quantitatis  $\frac{1}{A}$ , si

fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu a centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcunque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: et (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel  $1\frac{1}{2}$  de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu et ascensu redierit;

hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel  $1\frac{1}{2}$  ad 1, ideoque  $\frac{n}{m} \frac{n}{m} = 3$

valeat  $\frac{1}{64} = 3$  vel  $\frac{1}{16} = 3$  vel  $\frac{1}{4} = 3$  vel  $\frac{4}{9} = 3$ : erit vis ut  $A^{\frac{1}{64}} = 3$

vel  $A^{\frac{1}{16}} = 3$  vel  $A^{\frac{1}{4}} = 3$  vel  $A^{\frac{4}{9}} = 3$ , id est, reciprocè ut  $A^3 = \frac{1}{64}$

vel  $A^3 = \frac{1}{16}$  vel  $A^3 = \frac{1}{4}$  vel  $A^3 = \frac{4}{9}$ . Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideo-

que  $A^{\frac{n}{m}} = 3$  æqualis  $A^{-2}$  seu  $\frac{1}{A^2}$ ; et propterea decrementum vi-

rium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstra-

tum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel

duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit;

erit m ad n ut  $\frac{3}{4}$  vel  $\frac{2}{3}$  vel  $\frac{1}{3}$  vel  $\frac{1}{4}$  ad 1, ideoque  $A^{\frac{n}{m}} = 3$  æqualis

$A^{\frac{16}{9}} = 3$  vel  $A^{\frac{9}{4}} = 3$  vel  $A^9 = 3$  vel  $A^{16} = 3$ ; et (g) propterea vis

aut reciprocè ut  $A^{\frac{1}{9}}$  vel  $A^{\frac{4}{9}}$ , aut directè ut  $A^6$  vel  $A^{13}$ . Denique si

corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revo-

lutionem integram, et præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis

(e) \* Et contra si corpus de apside ad apsidem, &c. Nam si vis in recessu a centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere et ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu a centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Quo enim citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas  $\frac{360}{n}$  m, aut quantitas  $\frac{m}{n}$ , adeoque eò major erit quantitas  $\frac{n}{m}$ , ejusque quadra-

tum  $\frac{n}{m} \frac{n}{m} = p = q$ , et hinc eò longius quantitas  $\frac{1}{A^3 - 4}$  a quantitate  $\frac{1}{A^3}$  recedet.

(f) \* Ut in præcedentibus demonstratum est. In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (per Cor. 1. Prop. XIII.) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili et æquali ejus umbilicem revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eadem ellipsi mobili fertur (446).

(g) \* Et propterea vis aut reciprocè. Ut  $A^{\frac{1}{9}}$ , vel  $A^{\frac{4}{9}}$ , aut directè ut  $A^6$ , vel  $A^{13}$ .

Est enim  $A^{\frac{16}{9}} = 3 = A - \frac{11}{9} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$ , et

$A^{\frac{9}{4}} = 3 = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$  et  $A^9 = 3 = A^6$  et  $A^{16} = 3 = A^{13}$ .

corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit  $m$  ad  $n$  ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, <sup>(h)</sup> ideoque  $A^{\frac{n}{m} \frac{n}{m} - 3}$  erit æquale  $A - \frac{29523}{14641}$ ; et propterea vis centripeta reciproce ut  $A^{\frac{29523}{14641}}$  seu reciproce ut  $A^{\frac{2}{243}}$  proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus  $59\frac{3}{4}$  propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

*Corol. 2.* Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, et huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ oriatur: et contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut  $\frac{1}{A A}$ , et vis extranea ablata ut  $c A$ , ideoque vis reliqua ut  $\frac{A - c A^4}{A \text{ cub.}}$ ; erit (in exemplis tertiis)  $b$  æqualis 1,  $m$  æqualis 1, et  $n$  æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum 180  $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ . <sup>(i)</sup> Po-

<sup>(h)</sup> \* Ideoque  $A^{\frac{n}{m} \frac{n}{m} - 3}$  erit æquale  $A - \frac{29523}{14641}$ .

Erit enim in hac hypothesi  $\frac{n}{m} \frac{n}{m} = \frac{14400}{14641}$ , et  $\frac{n}{m} \frac{n}{m} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = -\frac{29523}{14641}$ . Est autem  $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$ , proximè; nam  $241 \times 243 = 58563$ , et  $4 \times 14641 = 58564$ ; decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus  $59\frac{3}{4}$ , propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit, differentia enim inter 2, et  $2 + \frac{4}{243}$ , est  $\frac{4}{243}$ , differentia verò inter 3 et  $2 + \frac{4}{243}$  est  $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$ . Porro  $\frac{239}{243}$  est ad  $\frac{4}{243}$  seu 239 ad 4 ut  $59\frac{3}{4}$  ad 1.

<sup>(i)</sup> \* Ponamus esse  $c \propto A$  ad  $\frac{1}{A A}$ , hoc est, ponendo  $A$  vel  $T = 1$ ,  $c$  ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, et erit  $c = \frac{100}{35745}$ ,  $1 - c = \frac{35645}{35745}$ ,  $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$ ; unde  $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$ , et hinc  $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ , &c.

454. *Scholium.* Hermannus in scholio ad Prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, et contrâ; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis  $p$ , seu (451) vis  $V F F A + V R G G - V R F F = \frac{y}{A^3}$

$= \frac{y}{z^3}$ , ponendo altitudinem  $A = z$ , et erit (450)  $y = V F F z + V R G G - V R F F$ ; capiantur utrinque fluxiones et invenietur  $d y = V F F d z$ , et faciendū  $Q d z = d y$ , erit  $Q = V F F$ . Loco  $V F F$ , ipsius valor  $Q$  substituat in superiori æquatione, et erit  $y = Q z + \frac{Q R G G - Q R F F}{F F} = Q z - Q R + \frac{Q R G G}{F F}$ . Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit  $z = R = T$ , et proinde  $y = \frac{Q T G G}{F F}$  et hinc  $G G : F F = y : Q T$ , ac  $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{Q T}$  quæ est formula generalis quaesita. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut  $\frac{b z^m + c z^n}{z^3}$  hoc est  $y = \frac{b z^m + c z^n}{z^3}$ , erit  $d y = Q d z = m b z^{m-1} d z + n c z^{n-1} d z$ ; unde  $Q = m b z^{m-1} + n c z^{n-1}$ , atque ita per formulam inventam  $G G : F F = b z^m +$

namus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est  $c$  esse  $\frac{100}{33743}$ , existente  $A$  vel  $T$  æquali 1, et  $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$  evadet  $180 \sqrt{\frac{35645}{33343}}$ , seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44 s. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 s. perveniet ad apsidem imam, et hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus et descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: et pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, et planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima et absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur et orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

$c z^n : T m b z^{m-1} + T n c z^{n-1}$ , et ponendo  $z = T = 1$ ,  $G G : F F = b + c : m b + n c$ , ut in exemplis tertiis Newtonus invenit. Sit nunc data ratio  $G$  ad  $F$ , nempe  $m$  ad  $n$ , et vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis  $z$ , illius dignitatis index dicatur  $p$ , sitque adeò vis centripeta ut  $z^p$ , et erit  $\frac{y}{z^3} \frac{nn}{mm} - 3 = p$ , ut in Cor. 1. repertum est.

$= z^p$ , ac  $y = z^p + 3$ ,  $dy = Q dz = (p + 3) \times z^{p+2} dz$ ,  $Q = (p + 3) \times z^{p+2}$ . Hinc  $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^p + 3 : (p + 3) \times T z^p + 2$ , hoc est, ponendo  $z = T = 1$ ,  $mm : nn = 1 : p + 3$ , atquè ità  $\frac{nn}{mm} = p + 3$ , et

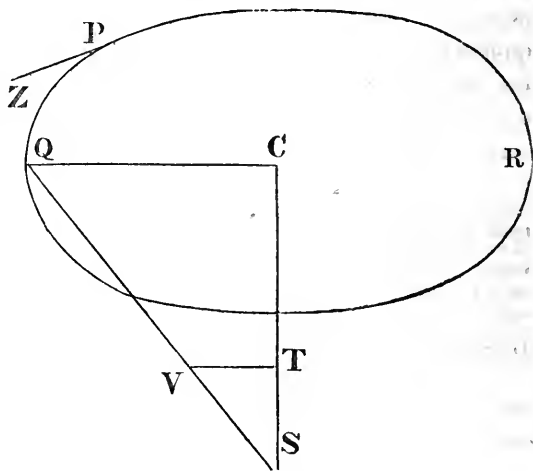
## SECTIO X.

*De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.*

## PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

*Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.*

Sit S centrum virium, S C distantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P secundum rectam P Z egrediens, Q corpus idem in trajectory suâ revolvens, et P Q R trajectory illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur C Q, Q S, et si in Q S capiatur S V proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S, et agatur V T quæ sit parallela C Q, et occurrat S C in T: Vis S V resolvetur (per legem Corol. 2.) in vires S T, T V; quarum S T



trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera T V, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis S T tolleretur, et corpus vi solâ T V revolveretur circa <sup>(\*)</sup> centrum C in spa-

(\*) \* 455. *Circâ centrum C in spatio libero.* Vis centripeta S V, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, et erit ob triângula S V T, S Q C similia.  $S Q : Q C = S V$  seu  $Q : V T = \frac{Q \times Q C}{S Q}$ . Sed ob angulum Q C S rectum

tio libero. Datâ autem vi centripetâ T V quâ corpus Q in spatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectoria P Q R, quam corpus describit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; et contra. Q. e. i.

## PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

*Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantia corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolvantur describent ellipses, et revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eundi et redeundi periodos iisdem temporibus absolvant.*

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis S V, quâ corpus Q in plano quovis P Q R revolvens trahitur versus centrum S, est ut distantia S Q; atque ideo ob proportionales S V et S Q, T V et C Q, vis T V, quâ corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum, est ut distantia C Q. Vires igitur, quibus corpora in plano P Q R versantia trahuntur versus punctum C, sunt (!) pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S; et propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis P Q R circa punctum C, atque in spatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol. 2. Prop. X. et Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent ellipses in plano illo circa centrum C, vel pe-

$S Q^2 = Q C^2 + S C^2$ , ergo V T, seu vis ad C tendens in loco Q, sive  $\frac{Q \times Q C}{S Q}$  crit

æqualis  $\frac{Q \times Q C}{\sqrt{Q C^2 + S C^2}}$ . Cum igitur data sit S C distantia minima centri S a plano Q P C positione dato, si loco S Q in quantitate Q, scribatur  $\sqrt{Q C^2 + S C^2}$ , obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex solâ distantia Q C et quantitativibus datis compositus. Exempli causâ, si vis S V, ad S tendens in loco Q sit ut distantia S Q, erit V T, seu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut  $\frac{S Q \times Q C}{S Q}$  hoc est, ut Q C.

Si vis S V fuerit ut  $\frac{1}{S Q^2}$ , erit V T, ut  $\frac{Q C}{S Q^3}$ , hoc

est, ut  $\frac{Q C}{Q C^2 + S C^2 \times \sqrt{Q C^2 + S C^2}}$ , et itâ de cæteris suppositionibus.

(!) \* Sunt pro ratione distantiarum, &c. Hoc est vires absolutæ ad S et C tendentes sunt æquales, ita ut si alicubi fuerit P C = Q S, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, est ad vim quâ versus S urgetur, ut Q C ad Q S, et vis in loco Q ad C tendens est etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut Q C ad P C seu Q S; quare vis in loco Q ad S tendens æqualis est vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ sunt ut distantia, temporibus semper æqualibus ellipses quasvis, utut inæquales, describent circa sua centra (per Prop. X.) Si autem ellipseos P Q R quam corpus in plano describit, latitudo in infinitum minuat, describet corpus rectam aliquam Q C R, motu accelerato ad centrum C accedens, et motu retardato ab ipso recedens usque ad R, deinde rursus ex loco R, ad centrum C recidens, et itâ circa centrum C, ultrò citròque oscillabitur.

riodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. e. d.

*Scholium.*

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. <sup>(m)</sup> Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, et eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè ascendendo et descendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

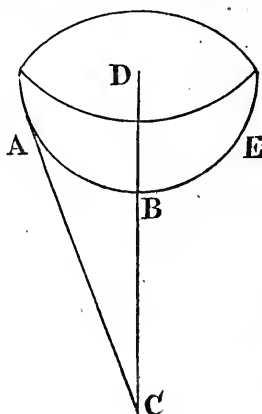
*Si rota globo extrinsecus ad angulos <sup>(n)</sup> rectos insistat, et more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidiî qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

*Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat et revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum*

<sup>(m)</sup> \* Concipe lineam curvam A B in plano A C E D descriptam circa axem datum D B C per centrum virium C transeuntem revolvi et eâ revolutione superficiem curvam A B E describi, tum corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hac superficie perpetuò reperiat. Si corpus illud obliquè descendendo et ascendendo per A B E, E B A currat ultrò citròque peragetur illius motus in plano A C E D per axem C D transeunte, atque adeò in lineâ curvâ A B E, cum (ex hyp.) nulla adsit vis quæ corpus a plano illo cogat deflectere; superficies A B E perfectè tersa ac polita supponitur.

<sup>(n)</sup> \* Ad angulos rectos, id est, ità ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proindè in duo hæmispheria dividat ac circum maximum in ejus superficie signet.



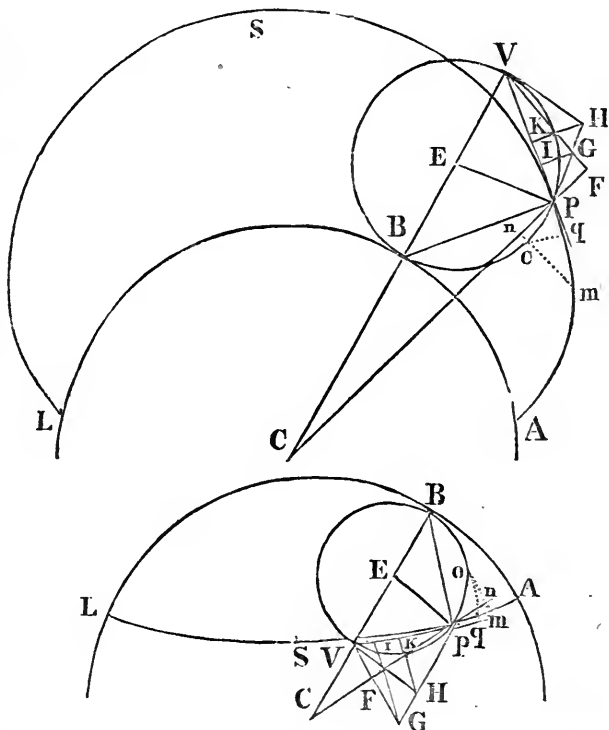


*quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versus arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.*

Sit A B L globus, C centrum ejus, B P V rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, et P punctum datum in perimetro rotæ.

Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo A B L ab A per B versus L, et inter eundem ita revolvi ut arcus A B, P B sibi invicem semper æquantur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam A P. Sit autem A P via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A, et erit viæ hujus longitudo A P ad duplicum sinum versus arcus  $\frac{1}{2}$  P B, ut  $2 C E$  (°) ad

C B. Nam recta C E (si opus est producta) occurrat rotæ in V, junganturque C P, B P, E P, V P, et in C P productam demittatur normalis V F. Tangant P H, V H circulum in P et V concurrentes in H, secetque P H, ipsam V F in G, et ad V P demittantur normales G I, H K. Centro item C et intervallo quovis describatur circulus n o m secans rectam C P in n, rotæ perimetrum B P in o, et viam curvilineam A P in m.

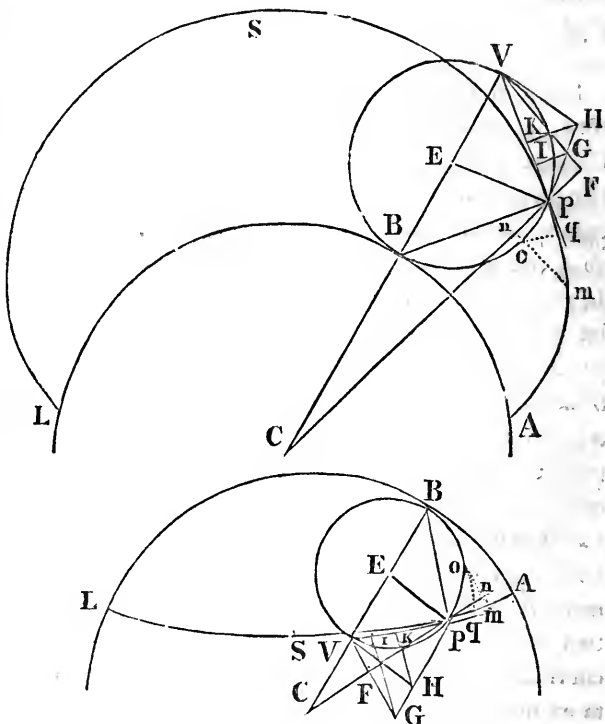


(°) \* Ut  $2 C E$  ad  $C B$ . Hoc est, ob  $2 C E = 2 B E$ , ut summa vel differentia diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

centroque V et intervallo V o describatur circulus secans V P productam in q.

Quoniam rota eundosemper revolvitur circa punctum contactus B, (P) manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad lineam illam curvam A P quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta V P tanget hanc curvam in puncto P. Circuli n o m radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiae C P; et, ob (q) similitudinem figuræ evanescentis P n o m q et figuræ P F G V I,

ratio ultima lineolarum evanescentium P m, P n, P o, P q, id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ A P, rectæ C P, arcus circularis B P, ac rectæ V P, eadem erit quæ linearum P V, P F, P G, P I respectivè. Cum autem V F ad C F et V H ad C V perpendiculares sint,



(P) \* Manifestum est quod recta B P, &c. Nam evidens est in circuli B P V revolutione, centro B radio B P singulis tempusculis describi arcum circuli seu incrementum nascens curvæ A P, ad quod proindè radius B P perpendicularis est, sed ob angulum V P B in semicirculo rectum, linea V P in eum radium B P est perpendicularis, ergo linea V P est tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ A P, ideoque ipsius curvæ A P.

(q) \* Et ob similitudinem figuræ evanescentis. Hæc figuræ evanescente arcus P o, P q, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium H P, V P productarum, et arcus

m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi n P o et G P F, o P m et G P I, erunt æquales, atquè adeò ob angulos o n P et G F P, o q P et G I P, rectos, proindèque æquales, figura evanescentis P n o m q, similis erit figuræ P F G V I.

(r) \* Id est ratio mutationum momentanearum, seu incrementorum vel decrementorum nascentium curvæ A P, quæ ex A m fit A P, rectæ C P, quæ ex C m fit C P arcus circularis B P, qui ex B o fit B P, ac rectæ V P, quæ ex V q, fit V P.

angulique (\*)  $H V G$ ,  $V C F$  propterea æquales; et (†) angulus  $V H G$  (ob angulos quadrilateri  $H V E P$  ad  $V$  et  $P$  rectos) angulo  $C E P$  æqualis est, similia erunt triangu-  
la  $V H G$ ,  $C E P$ ; et inde fiet ut  $E P$  ad  $C E$  ita  $H G$  ad  $H V$  (‡) seu  $H P$  et ita (¤)  $K I$  ad  $K P$ , et (¥) composi-  
tè vel divisim ut  $C B$  ad  $C E$  ita  $P I$  ad  $P K$ , et duplicatis consequen-  
tibus ut  $C B$  ad  $2 C E$  ita (z)  $P I$  ad  $P V$ , atque ita  $P q$  ad  $P m$ . Est  
(a) igitur decrementum lineæ  $V P$ , id est, incrementum lineæ  $B V - V P$   
ad incrementum lineæ curvæ  $A P$  in datâ ratione  $C B$  ad  $2 C E$ , et prop-  
terea (per Corol. Lem. IV.) longitudines  $B V - V P$  et  $A P$ , incre-  
mentis (b) illis genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente  $B V$   
radio, est  $V P$  cosinus anguli  $B V P$  seu  $\frac{1}{2} B E P$ , ideoque  $B V - V P$   
sinus versus est ejusdem anguli; et propterea in hac rotâ, cujus radius  
est  $\frac{1}{2} B V$ , erit  $B V - V P$  duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} B P$ . Ergo  $A P$   
est ad duplum sinum versum arcus  $\frac{1}{2} B P$  ut  $2 C E$  ad  $C B$ . Q. e. d.

Lineam autem  $A P$  in propositione priore cycloidem extra globum, al-  
teram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabi-  
mus.

(\*) \* *Angulique  $H V G$ ,  $V C F$ , propterea æquales.* Ob angulum  $V F C$  rectum, summa  
angulorum  $F C V$ ,  $C V F$  æqualis est angulo  
recto  $C V H$ , quare detracto communi angulo  
 $C V F$ , fit angulus  $F C V = F V H$  sive  
 $H V G$ .

(†) \* *Et angulus  $V H G$ , &c.* Tangentes  
 $H V$ ,  $H P$  cum radiis  $E V$ ,  $E P$  angulos re-  
ctos constituunt, adeoque quadrilateri  $H V E P$ ,  
anguli duo reliqui  $V H P$  sive  $V H G$  et  $V E P$ ,  
sunt simul æquales duobus rectis, quare cum  
sint quoque anguli  $V E P$ ,  $C E P$  simul duo-  
bus rectis æquales, liquet angulum  $C E P$ , æ-  
qualem esse angulo  $V H G$ , et in secunda figura  
cum anguli quadrilateri  $V H P E$  in  $V$  et  $P$   
sint recti, reliqui anguli  $V H P$ ,  $V E P$  æquales  
sunt duobus rectis, sed etiam  $V H P$  et  $V H G$   
sunt æquales duobus rectis, ergo detracto com-  
muni  $V H P$ ,  $V E P$  sive  $C E P$  est æqualis  
 $V H G$ .

(‡) \* *Ad  $H V$ , seu  $H P$ .* Nam circuli tan-  
gentes  $H V$ ,  $H P$  sunt æquales.

(¤) \* *Et ita  $K I$  ad  $K P$ .* Etenim ob paral-  
lelas  $H K$ ,  $G I$ , est  $H G : H P = K I :$   
 $K P$ .

(¥) \* *Et compositè vel divisim.* Cum sit  
 $E P$ , seu  $B E : C E = K I : K P$ , si rota  
globo intrinsecus insistat, erit compositè  $B E +$   
 $C E$ , seu  $C B : C E = K I + K P$ ; seu  
 $P I : P K$ . Si verò rota globo extrinsecus in-  
sistat, erit divisim  $C E - B E$ , seu  $C B : C E$   
 $= K P - K I$ , seu  $P I : P K$ .

(z) \* *Ita  $P I$  ad  $P V$ .* Nam in triangulo

$P H V$  isoscele, est  $P K = K V$ , adeoque  
 $2 P K = P V$ .

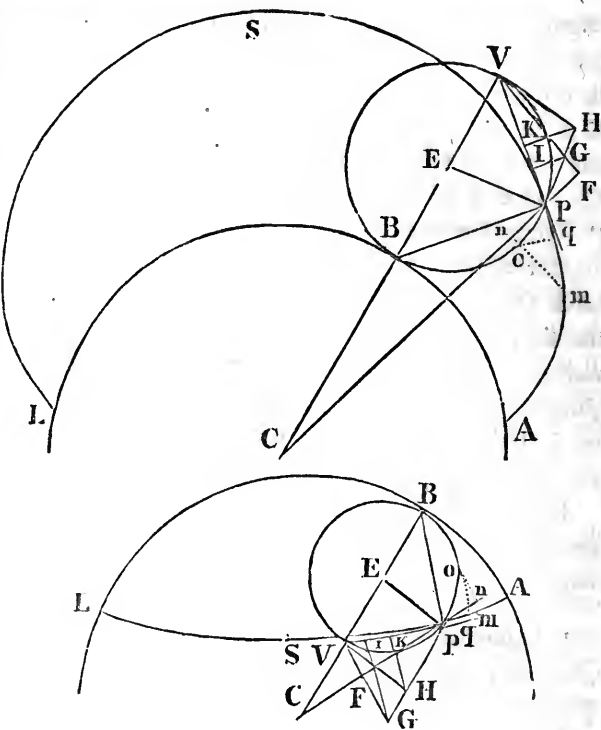
(a) \* *Est igitur decrementum lineæ  $V P$ ,*  
&c. Dum arcus  $A m$  crescit fitque  $A P$ , recta  
 $V q$  decrescit et fit  $V P$ ; quare est  $P m$  incre-  
mentum curvæ  $A m$  seu  $A P$ , et  $P q$  decre-  
mentum rectæ  $V P$ . Cum autem sit  $B V$  cir-  
culi diameter constans, quantum decrescit  $V P$ ,  
tantum crescit differentia  $B V - V P$ , unde  
decrementum lineæ  $V P$ , æquale est incremento  
lineæ  $B V - V P$ . Est igitur incrementum  
lineæ  $B V - V P$ , ad incrementum lineæ curvæ  
 $A P$ , &c.

(b) \* *Incrementis illis genitæ, &c.* Cum  
punctum  $P$  est in  $A$ , punctum  $B$  est etiam in  
 $A$ , fitque  $V P = V B$ , adeoque  $B V - V P$   
 $= 0$ . Simul ergò crescere incipiunt lineæ  
 $B V - V P$  et  $A P$ ; et quoniam in datâ ra-  
tione crescunt, erit semper  $B V - V P$  ad  $A P$   
in datâ illâ ratione  $C B$  ad  $2 C E$ .

(c) 456. *Sed existente  $B V$  radio, &c.* Ob  
angulum  $B P V$  rectum, est  $B V$  ad  $V P$  ut  
sinus totus ad sinum anguli  $V B P$  qui comple-  
mentum est anguli  $B V P$  ad rectum. Quare  
existente  $B V$  radio, est  $V P$  cosinus anguli  
 $B V P$  æqualis dimidio angulo ad centrum  
 $B E P$ . Est autem cujusvis anguli sinus ver-  
sus æqualis differentie inter radium et cosinum  
ejusdem anguli, ergò existente  $B V$  radio, erit  
 $B V - V P$  sinus versus anguli  $\frac{1}{2} B E P$ ; et  
quoniam in diversis circulis æqualium angulo-  
rum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in  
hac rotâ cujus radius est  $\frac{1}{2} B V$ , erit  $B V -$   
 $V P$ , duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} B P$ .

*Corol. 1.* Hinc si  
(<sup>d</sup>) describatur cyclois integra  $ASL$  et bisecetur ea in  $S$ , erit longitudo partis  $PS$  ad longitudinem  $VP$  (quæ duplus est sinus anguli  $VBP$ , existente  $EB$  radio) ut  $2CE$  ad  $CB$ , atque ideo in ratione datâ.

*Corol. 2.* Et (<sup>e</sup>) longitudo semiperimetri cycloidis  $AS$  æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum  $BV$  ut  $2CE$  ad  $CB$ .



(<sup>d</sup>) 457. *Hinc si describatur, &c.* Ubi punctum  $P$  pervenit ad  $S$ , arcus  $BP$  semicirculo, arcus  $\frac{1}{2} BP$  quadrantis, et sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$  radio, æquales fiunt. Quare in hoc casu curva  $AS$ , est ad diametrum  $BV$ , ut  $2CE$  ad  $CB$ ; cumque in loco quovis  $P$ , sit etiam curva  $AP$ , ad duplum sinum versus  $\frac{1}{2} BP$ , seu ad  $BV - VP$  (456) ut  $2CE$  ad  $CB$ , erit  $AS : BV = AP : BV - VP$ , et hinc  $AS - AP$ , seu  $PS : BV - VP = VP$ , seu  $VP = AS : BV = 2CE : CB$ .

(<sup>e</sup>) \* *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

458. *Corol. 3.* Recta  $CS$  cycloidis perpendicularis est, et recta  $CA$  eam tangit in  $A$ . Est enim  $BP$  ad cycloidem perpendicularis, et  $VP$  tangens ejus in  $P$ , at ubi punctum  $P$  pervenit in  $S$ ,  $BP$  fit  $BS$ , seu  $BV$ , et ubi punctum  $B$  est in  $A$ ,  $VP$  coincidit cum  $VB$ .

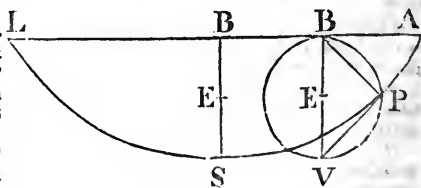
459. *Corol. 4.* Si per punctum quodvis  $P$  agatur  $PV$  cycloidem tangens in  $P$ , et ad eam erigatur perpendicularum  $PB$  globo occurrens in  $B$ , jungaturque  $CB$  tangentem secans in  $V$ , erit  $BV$  rotæ diameter.

460. *Corol. 5.* Ex genesi cycloidis liquet arcum globi  $AB$ , æqualem esse arcui rotæ  $BP$ .

461. *Corol. 6.* Si rotæ diameter  $VB$  æqua-

lis constituatur semidiametro globi  $CB$ , cyclois intrâ globum evadet linea recta per centrum globi  $C$  transiens. Nam in hoc casu  $CS = 0$ , et  $2CE = CB$ ; unde punctum cycloidis medium  $S$ , cum centro coincidit, et quia (457)  $AS : BV = 2CE : CB$ , erit  $AS = BV = CB$  atque adeo est  $AS$  linea recta per centrum  $C$  transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro  $CB$ .

462. *Corol. 7.* Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies spherica in

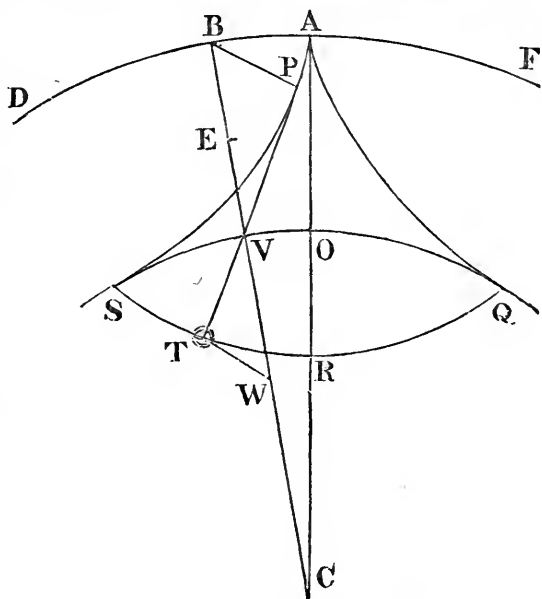


planum, fietque  $ABL$  linea recta, et  $BE$  finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ  $CB$ , erit  $CE = CB$ , adeoque cyclois tam intrâ quam extrâ globum abibit in cycloidem

## PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

*Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.*

Intra globum Q V S, centro C descriptum, detur cyclois Q R S bisecta in R et punctis suis extremis Q et S superficiiei globi hinc inde occurrens. Agatur C R bisecans arcum Q S in O, et producat eam ad A, ut sit C A ad C O ut C O ad C R. Centro C intervallo C A describatur globus exterior D A F, et intra hunc globum a rotâ, cuius diameter sit A O, describantur duæ semicycloides A Q, A S, quæ (\*) globum interiorem tangant in Q et S et globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, filo A P T longitudinem A R æquante, pendeat corpus T, et ita intra semicycloides A Q, A S oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculari A R, filum parte sui superiore



vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457)  $AP : BV - VP = 2CE : CB = 2 : 1$ , erit  $AP = 2 \times (BV - VP)$ , sed  $BV - VP$ , est duplus sinus versus arcus  $\frac{1}{2} BP$ , existente B E radio (456). Ergo in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcus B P, inter planum A B L et punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit  $AS = 4BE = 2BS = 2BV$ ; Est enim B E sinus versus quadrantis.

(\*) \* Quæ globum interiorem tangant in Q et S, et globo exteriori occurrant in A. Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est A O) ex A proficiscentis terminari ad superficiem globi interioris in punctis extremis Q et S cycloidis Q R S datæ. Producantur itaque lineæ C Q, C S ad F et D, eritque  $FQ = DS = AO$ , et super diametros F Q,

D S intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque P punctum rotæ semicycloides describens; Liqueat arcus O Q et A F, O S et A D esse proportionales radiis C O, C A sive (per const.) radiis C R, C O et divisim rotarum diametris O R, A O, ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has diametros descriptarum; Sed cum Q et S sint puncta extrema cycloidis datæ Q R S et C O arcum Q S bisecet; erunt arcus O Q et O S æquales semicircumferentiæ rotæ super diametrum O R descriptæ (460) ergo etiam arcus A F et A D æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super diametrum A O descriptæ, sed arcus F P aut D P est semper æqualis arcui A F aut A D (460); erunt ergo arcus F P et D P semicirculi, et P cadet in extremitatibus Q et S diametrorum F Q, D S, sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois

A P applicetur ad semicycloidem illam A P S versus quam peragitur motus, et circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ P T cui semicyclois nondum obijcitur, protendatur in lineam rectam; et pondus T oscillabitur in cycloide datâ Q R S. Q. e. f.

Occurrat enim filum P T tum cycloidi Q R S in T, tum circulo Q O S in V, agaturque C V; et ad fili partem rectam P T, e punctis extremis P ac T, erigantur perpendiculara B P, T W, occurrentia rectæ C V in B, et W. Patet, <sup>(f)</sup> ex constructione et genesi similium figurarum A S, S R, <sup>(h)</sup> perpendiculara illa P B, T W abscindere de C V longitudines

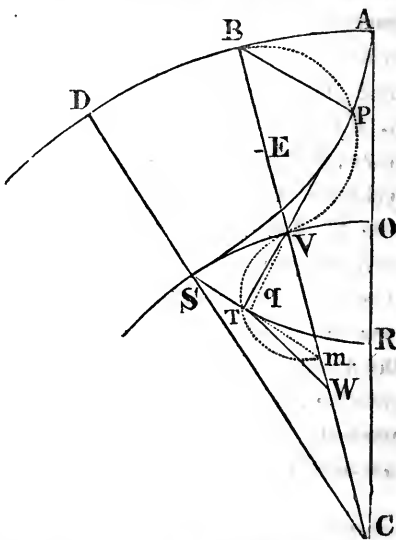
est descripta, ergo semicycloides descriptæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q et S. Q. e. d.

<sup>(f)</sup> 465. Patet ex constructione et genesi similium figurarum A S, S R; Figuræ illæ dicuntur similes quia A O diameter rotæ quâ describuntur semicycloides A S, A Q est ad globi D A F radius A C ut diameter O R rotæ quâ describitur cyclois Q R S ad globi Q O S radius O C, (per constr.) unde manifestum quod cycloides A S, A Q, Q R, quæ eodem modo describuntur ac determinantur sunt inter se similes.

<sup>(h)</sup> \* Perpendiculara illa, &c. 1°. Probandum quod perpendicularum P B abscindat de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem. Fingatur rotam ita positam ut ejus punctum cycloidem describens sit in P, liquet, ex constructione, eam hujus rotæ diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis et quæ, si producat, transire debet per centrum C, utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (per Demonstr. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus diametri rotæ quæ globo est perpendicularis et perpendicularum in tangentem e puncto contactûs erectum transit per alteram ejusdem diametri extremitatem, ergo, cum sit (ex const.) filum P T tangens cycloidis in puncto P, et P B perpendicularum in illud, intersectiones V et B linearum P T et P B cum globis Q O S et D A F erunt extremitates ejus diametri rotæ quæ si producat, transit per centrum C, ergo ducta C V, perpendicularum P B abscindet de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem. Q. e. 1°. d.

2°. Perpendicularum T W abscindit de C V longitudinem V W rotæ diametro O R æqualem. Fingatur rota cycloidem S R Q describens ita posita, ut ejus dianter globo S O Q insists sit in lineâ C V globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus diametri, et dicatur q punctum illius rotæ cycloidem describens: Arcus V S erit æqualis arcui V q (460) utque totus arcus S O est æqualis arcui V m, erit V O = q m, et q m est mensura dupli anguli C V q; Sit verò rota describens cycloidem A P S posita sicut in priore casu, hoc est, ejus diameter globo

D A F insists sit in productione lineæ C V, erit arcus B A æqualis arcui B P (460) et est B P mensura dupli anguli B V P; Est autem



arcus V O sive q m ad B A sive B P, ut C O ad C A ideoque ut diametri rotarum O R ad A O (ex const.), arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus C V q est æqualis angulo B V P quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli C V q, B V P sunt per verticem oppositi et P V q est linea recta; itaque, filum P V productum ad T transit tam per extremitatem V diametri rotæ globo insistentis quam per ejus rotæ punctum q cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum P T est perpendicularare in tangentem cycloidis in puncto illo q sive T, ideoque ex constructione linea T W erit ea ipsa tangens,







initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, et propterea partes quæ manent describendæ et accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; et sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ et partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; et propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendicularum A R. Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R, per eosdem arcus cycloides, motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; et propterea, cum cycloidis partes duæ R S et R Q ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes et æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. e. d.

*Corol.* Vis <sup>(a)</sup> quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus T R ad ejusdem arcum S R vel Q R.

evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcus t R, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Undè corpora duo oscillantia t et T ex punctis t et T simul demissa, simul pervenient in R.

<sup>(a)</sup> \* Vis quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus T R, ad arcum S R, (ex demonstr. Prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim C S cycloidem S R tangit in S, (458), adeoque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. *Corol.* 1. Si centro A radio A R circulus describatur, cycloidis S R Q arcus nascentis in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli A R magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus oscillabitur corpus quo in cycloide, et quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo et in cycloide consonantia, atque hinc, non ablutente experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. *Corol.* 2. Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc cycloidem intrâ globum descriptam pertinens, sive, inveniatur æquatio exprimens rationem distantie cujusvis puncti T a centro ad perpendicularum in tangentem ex eo

puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius C V, a, diameter rotæ V W, a — c, erit distantia C R sive C W, c; Ducatur ex puncto quovis T linea T C ad centrum quæ dicatur x, ducatur tangens T X ex eo puncto T et ex centro demittatur in eam tangentem perpendicularum C X, sit T X = z et C X = p. Erit

ubique  $p p = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$ ; Nam ob similia triangu-  
la V T W, W C X est

$C W (c) : V W (a - c) = C X (p) : T V$

$= \frac{p}{c} \times a - c$  et

$C V (a) : V W (a - c) = T X (z) : T W$

$= \frac{z}{a} \times a - c$ ; est itaque  $T V^2 + T W^2$

$= \frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2$ . Sed

$T V^2 + T W^2 = V W^2 = (a - c)^2$ , ergo

$\frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2 = (a - c)^2$

et dividendo utrumque membrum æquationis per

$(a - c)^2$  erit  $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} \left( \text{sive } \frac{a^2 p^2 + c^2 z^2}{a^2 c^2} \right)$

= 1, et multiplicato utroque membro æquationis per  $a^2 c^2$  est  $a^2 p^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2$ ,

sed est  $z^2 = x^2 - p^2$  (per const.) Ergo

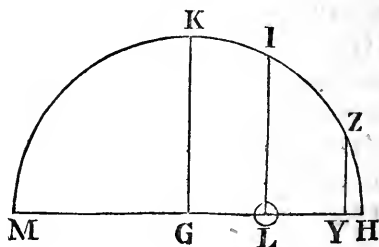
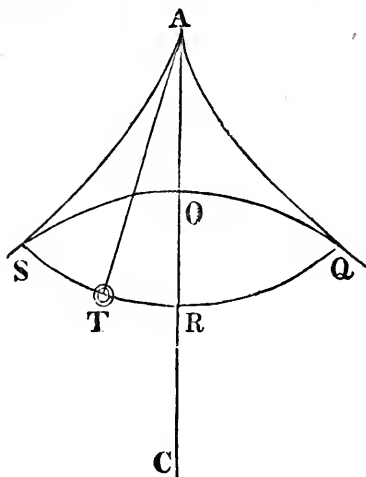
$a^2 p^2 + c^2 x^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2$  et factâ transpositione  $a^2 p^2 - c^2 p^2 = a^2 c^2 - c^2 x^2$ ,

ideoque  $p^2 = \frac{a^2 c^2 - c^2 x^2}{a^2 - c^2}$ . Q. e. d.

## PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

*Definire et velocitates pendulorum in locis singulis, et tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.*

Centro quovis G, intervallo G H cycloidis arcum R S æquante, describe semicirculum H K M semidiametro G K bisectum. Et si vis cen-



tripeta, distantis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro H I K æqualis vi centripetæ in perimetro globi

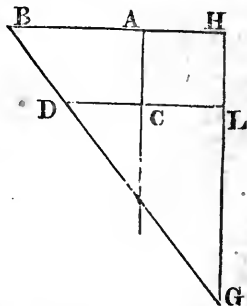
Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam inversis solummodo terminis et signis ut sit p

$$= \frac{c^2 x^2 - a^2 c^2}{c^2 - a^2}.$$

467. *Lemma.* Ad punctum G tendat vis centripeta distantæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ H B, L D rectæ G H perpendiculares, sitque recta G D B locus punctorum B, D, capiatur H A ad H B ut vis centripeta constans ad vim variabilem in loco dato H, et agatur A C rectæ H G parallela lineam L D secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante H A, alterum vi variabili H B vel L D urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, et erit  $V^2$  ad  $v^2$ , ut area H A C L ad aream H B D L, (per Prop. 39. et not. 408.) id est  $V^2 : v^2 = H L \times H A : H L \times B H + D L$ .

Et quoniam in centro G evanescit D L erit in illo

centro  $V^2 : v^2 = 2 H A : B H$ , et  $V : v = \sqrt{2 H A} : \sqrt{B H}$ . Quarè datis in loco H



viribus H A, H B, et velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisita, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

Q O S ad ipsius centrum tendenti; et (°) eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio et spatiis describendis T R, L G semper proportionales, atque ideo, si æquantur T R et L G, æquales in locis T et L; patet corpora illa describere spatia S T, H L æqualia sub initio, (P) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, et æqualia spatia describere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus quo corpus describit arcum S T est ad tempus oscillationis unius, ut arcus H I, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad semiperipheriam H K M, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu (A) incrementum momentaneum lineæ H L ad incrementum momentaneum lineæ H G, arcubus H I, H K æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata L I ad radium G K, sive ut (r)  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  q. —  $\sqrt{TR^2}$  q. ad S R. (s) Unde

(°) \* Et eodem tempore. Id est, simul demittantur ex locis S et H corpora T et L.

(P) \* Ideoque subinde pergere æqualiter urgeri et æqualia spatia iisdem nempe temporibus describere.

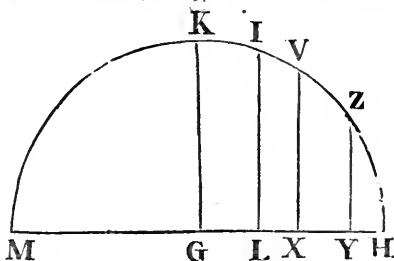
(A) \* Seu incrementum momentaneum, &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proinde sunt ut velocitates in locis L et G, quibus describuntur, arcus autem H I, H K, quæ tempora exhibent, crescant ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

(r) Sive ut  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$  ad S R. Est enim, ex naturâ circuli  $L I^2 = M L \times I H = G H^2 - G L^2 = S R^2 - T R^2$ , adeoque  $L I = \sqrt{SR^2 - TR^2}$ , et  $L I : G K = \sqrt{SR^2 - TR^2} : G K$ , seu S R.

(s) 468. Unde cum, &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi Q O S vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi sollicitatum describit circulum H K M, tum tempus quo semiperipheriam H K M percurrit (201) hoc est, tempus unius oscillationis integræ; et contrâ, dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripetâ in H vel S (202). Porro dato arcu S T, vel rectâ æquali H L, datur L I sinus arcus H I, et hinc datur hic arcus, adeoque et ratio H I, ad H K M, id est, ratio temporis quo percurritur H L vel S T ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrâ, dato tempore quo describitur H L vel S T, datur arcus H I, et hinc datur illius sinus rectus L I sinusque versus H L vel arcus S T. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonstr.) velocitas in R vel G, sit ad velocitatem in T vel L, ut G K ad

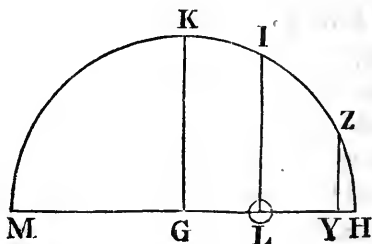
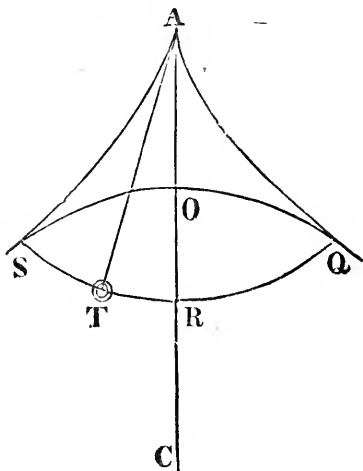
L I, seu ut S R ad  $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ . Dato tempore quo describitur S T vel H L, datur arcus H I, et illius sinus rectus L I, adeoque et velocitas in L et contrâ.

Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. Prop. 51.) vel Y, de-



mittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali Y L, dabitur et tempus quo describitur et velocitas in T vel L, ac contrâ. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percurra (464), dato arcu T t, vel spatîo Y L dabitur spatium H X, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel Y L; dato spatîo H X, datur arcus H V et illius sinus rectus X V, et hinc datur tempus quo describitur H X et Y L, et velocitas in X; cumque sit velocitas in X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; et contrâ.

cùm, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, et velocitatibus et arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primò inveniendæ.



Oscillantur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum <sup>(1)</sup> diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: et, si vis absoluta globi cujusvis Q O S dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli a centro illo et vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut C O × V. Itaque <sup>(2)</sup> lineola H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix C O × V, describetur dato tempore; et,

(<sup>1</sup>) 469. Quorum diversæ sunt, &c. Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum a suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, v, et erit (ex hyp.) V : A = C D : C A = c d : c a = v : a, adeoque V : v = A : a, sed evanescentibus distantis, C D, c d, sunt V, v, vires absolutæ (per definitio-

nem VI. Newt.) quare vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricum in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuscumlibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

$$V : v = A : a$$

$$\text{Et per hyp. } C O : C A = B : A$$

$$C A \text{ vel } c a : c o = a : b$$

Ergò ex æquo V × C O : v × c o = B : b, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia a centro et vis absoluta conjunctim.

(<sup>2</sup>) • Itaque lineola nascens H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix C O × V, describetur dato tempore. Nam quadratum temporis quo descri-

bitur nascens H Y, est ut  $\frac{H Y}{C O \times V}$  (per Cor.

5. Lem. X.) Undè cum data sit ratio H Y ad C O × V (ex hyp.), quadratum temporis adeoque et tempus ipsum quo describitur H Y datum erit.

O  
A  
D  
C

o  
a  
d  
c

si (\*) erigatur normalis  $Y Z$  circumferentiæ occurrens in  $Z$ , arcus nascens  $H Z$  denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens  $H Z$  in subduplicatâ ratione rectanguli  $G H Y$ , ideoque ut  $\sqrt{G H \times C O \times V}$ . Unde tempus oscillationis integræ in cycloide  $Q R S$  (cum sit ut semiperipheria  $H K M$ , quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus  $H Z$ , qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut  $G H$  directè et  $\sqrt{G H \times C O \times V}$  inversè, hoc est, ob æquales  $G H$  et  $S R$ , ut  $\sqrt{\frac{S R}{C O \times V}}$ , sive (per Corol. Prop. L.) ut  $\sqrt{\frac{A R}{A C \times V}}$ . Itaque oscillationes in globis et cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, et subduplicatâ ratione distantiae inter punctum suspensionis et centrum globi inversè, et subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. Q. e. i.

*Corol. 1.* Hinc etiam oscillantium, cadentium et revolvantium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quæ cyclois integra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois (†) evadet linea recta per centrum globi transiens, et oscillatio jam erit descensus et subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvens arcum quadrantalem describit. Est (‡) enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis  $Q R S$  ut

$$1 \text{ ad } \sqrt{\frac{A R}{A C}}.$$

*Corol. 2.* Hinc etiam consecretantur quæ Wrennus et Hugenus de

(\*) \* *Et si erigatur normalis, &c.* Arcus  $H Z$  erit ad semiperipheriam  $H K M$ , ut tempus datum quo describitur  $H Y$ , ad tempus unius oscillationis (Prop. 38.) quod proinde erit ut semiperipheria  $H K M$ , seu ut radius  $G H$  directè, et arcus  $H Z$  inversè. Est autem arcus nascens  $H Z$  æqualis chordæ  $H Z$  (per Lem. 7.) adeoque (ex naturâ circuli)  $H Z^2 = H Y \times M H = 2 G H \times H Y$ ; Quare cum sit  $H Y$  ut  $C O \times V$ , erit  $H Z^2$  ut  $2 G H \times C O \times V$ , seu, ut  $G H \times C O \times V$ ; et hinc

$$\begin{aligned} \text{tempus unius oscillationis ut } & \sqrt{\frac{G H}{G H \times C O \times V}} \\ = & \sqrt{\frac{G H}{C O \times V}} = \sqrt{\frac{S R}{C O \times V}} = \\ & \sqrt{\frac{A R}{A C \times V}} \text{ ob } G H = S R, \text{ et } \frac{A R}{A C} = \frac{S R}{C O}, \\ & \text{(per Cor. Prop. 50.)} \end{aligned}$$

(†) \* *Cyclois evadet linea recta* (461).

(‡) \* *Est enim hoc tempus, &c.* Quoniam cycloide  $Q R S$  in rectam mutatâ fit  $A R = A C$ , erit (per Cas. 2.) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (Prop. 38.) per circuli quadrantem ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$ . Unde erit hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis  $Q R S$  in rectam non mutatâ ut  $\sqrt{\frac{1}{V}}$  ad  $\sqrt{\frac{A R}{A C \times V}}$ , hoc est, ob datam  $V$ , ut 1 ad  $\sqrt{\frac{A R}{A C}}$ . Quare dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis  $Q R S$  circa centrum  $C$ , dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, et tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

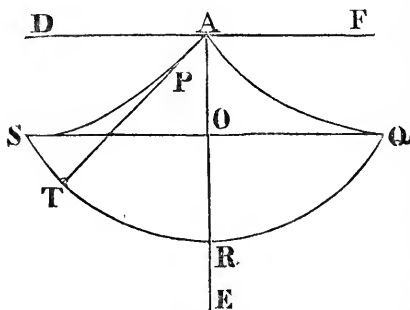
cycloide vulgari adinvenerunt. Nam <sup>(a)</sup> si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum; visque <sup>(b)</sup> centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, et cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto <sup>(c)</sup> autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud et punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum et punctum describens; ut invenit Wrennus: Et <sup>(d)</sup> pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili et æquali cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit Hugenius. Sed <sup>(e)</sup> et descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem Hugenius indicavit.

Apertantur autem propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; et pendula inferius in fodinis et cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

<sup>(a)</sup> \* Nam si globi diameter augeatur (462).

<sup>(b)</sup> \* Visque centripeta distantie infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, et quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundum lineas huic superficiem in planum mutata perpendiculares.

<sup>(c)</sup> \* Isto autem in casu (462).



<sup>(d)</sup> \* Et pendulum inter duas, &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quâ describitur cyclois A P S (462), quare semicycloides S R, A S similes erunt et æquales.

470. <sup>(e)</sup> \* Sed et descensus, &c. Erit in hoc

casu tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in Prop. 52. et ejus Cor. 2<sup>o</sup>.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (Prop. 38.). Est autem (200) tempus semirevolutionis in circulo H K M, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit  $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} S R = \frac{1}{2} A R = O R$  (462) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sic enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, et erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium

$$A O = \frac{d}{p}; \text{ sed (27) } \frac{d d t t}{p p} : t t = A O :$$

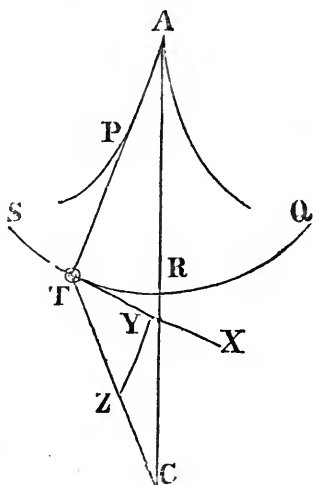
A E, ergo A O : A E = d d : p p. Hugenius cui pendulorum theoria debetur, Prop. 25. Part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. et lineamrum  $8 \frac{1}{2}$ , hoc est, linearum  $\frac{881}{2}$ , et hinc dimi-

## PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.*

Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ S T R Q, cujus axis sit A R transiens per virium centrum C. Agatur T X quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente T X capiatur T Y æqualis arcui T R. Nam (†) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta Y Z tangenti perpendicularis. Agatur C T perpendiculari illi occurrens in Z, et erit vis centripeta proportionalis rectæ T Z. Q. e. i.

Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam T Z cap-



dia penduli longitudo erat linearum  $\frac{881}{4} =$

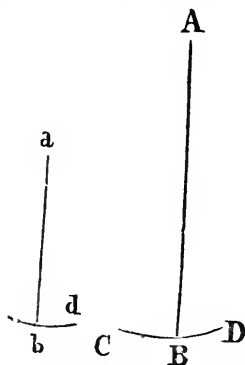
220. 25. Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, et proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769 ad 126025; quare spatium uno minuto secundo descriptum a corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15.

$\frac{1}{12}$ , quam proximè.

472. *Corol.* Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, et A C distantia a centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per Cas. 2. Prop. 52.) erit ut  $\sqrt{A R}$ , id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli et proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

473. *Corol.* Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum a b, bis oscilletur eo tempore quo A B semel; a b, quatuor oscillationes absolvat, dum A B duas conficit, et ità porro in aliis suppositionibus, ut patet. Quare numeri oscillationum isochronarum eodem tempore a duobus pendulis

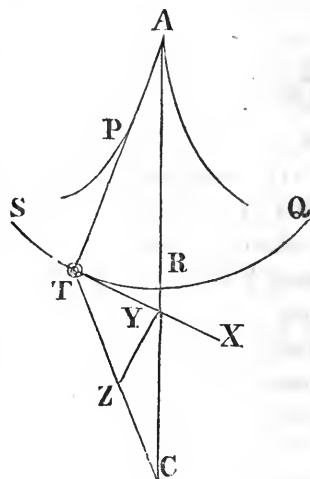
confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).



474. *Corol.* Hinc si tempus unius oscillationis penduli A B, sit T, tempus unius oscillationis penduli a b, sit t, numeri oscillationum eodem tempore confectarum N, n, erit T : t = n : N (473), et T T : t t = A B : a b (472) ac propterea n n : N N = A B : a b. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

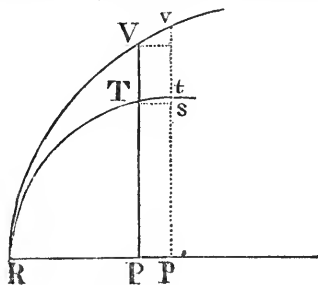
(†) 475 Nam longitudo arcus, &c. Curvæ

tam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires  $T Y$ ,  $Y Z$ ; quarum  $Y Z$  trahendo corpus secundum longitudinem fili  $P T$ , motum ejus nil mutat, vis autem altera  $T Y$  motum ejus in curvâ  $S T R Q$  directè accelerat vel directè retardat. <sup>(e)</sup> Proinde cum hæc sit ut via describenda  $T R$ , accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (majoris et minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, et propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. e. d. <sup>(h)</sup>

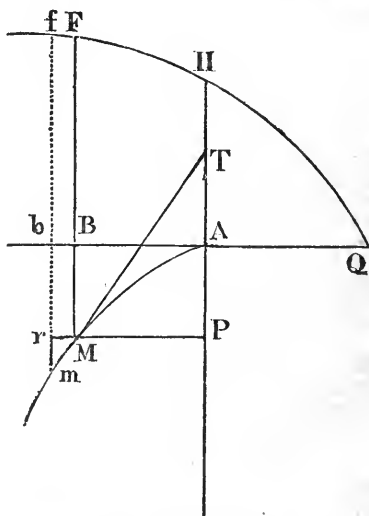


$R T t$  sit axis  $R P$ , vertex  $R$ , ad axem ordinatim applicatæ  $T P$ ,  $t p$ , infinitè propinquæ,  $T s$  axi parallela et ordinatæ  $t p$  occurrens in  $s$ .

476. Idem aliâ methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ  $A M m$ , axis  $A P$ , et vertex  $A$ . Per punctum quodvis  $M$  aga-



Sit  $R P = x$ ,  $P T = y$ , et erit  $P p = T s = d x$ ,  $t s = d y$ ,  $T t^2 = d x^2 + d y^2$ ,  $T t = \sqrt{d x^2 + d y^2}$ ; quare  $R T$ , fluens ipsius  $T t$ , æqualis erit fluenti quantitatis  $\sqrt{d x^2 + d y^2}$ . Ex æquatione ad curvam  $R T$ , quaeratur valor ipsius  $d y$  per  $d x$  et alias quantitates, sitque  $d y = Q d x$ ,  $Q$  vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit  $\sqrt{d x^2 + d y^2} = d x \sqrt{1 + Q Q}$ . In perpendiculari  $P T$ , capiatur  $P V = A \times \sqrt{1 + Q Q}$ , sitque  $A$  quantitas data, et curva  $R V$  locus punctorum  $V$ , erit area  $R V P$  elementum  $P p \times P V = A d x \sqrt{1 + Q Q}$ , undè  $T t = d x \sqrt{1 + Q Q} = \frac{P p \times P V}{A}$ , et capiendi utrinque fluentes  $R T = \frac{R V P}{A}$ , curvæ igitur  $R T$  rectificatio ad quadraturam figuræ  $R V P$  reducta est.



tur tangens  $M T$  axi occurrens in  $T$ , et  $M F$  axi parallela rectam  $A B$  axi normalem secans in  $B$ ; capiatur semper  $A B$  ad  $M T$  sicut constans quævis  $A$  ad  $B F$ , et punctum  $F$  curvam  $F H Q$  perpetuò tangat, erit spatium curvilineum  $B F H A$  æquale rectangulo sub arcu  $A M$  et constanti  $A$  compre-







Verùm (per Prop. 55.)  $g : v = b : T Z$   
 $\left(\frac{s \, d \, s}{d \, x}\right)$ , undè  $s \, d \, s = \frac{b}{g} v \, d \, x$ , et sumptis  
 fluentibus  $\frac{1}{2} s \, s = \frac{b}{g} S. v \, d \, x$ . Quoniam au-  
 tem evanescente  $s$ , fit  $x = c$ , fluens  $S. v \, d \, x$   
 ita accipi debet, ut, positâ  $x = c$ , evanescat.  
 Erît igitur  $s \, s = \frac{2b}{g} S. v \, d \, x$ ,  $s = \sqrt{\left(\frac{2b}{g} \times\right.}$

$S. v \, d \, x$ ), et sumptis fluxionibus  $ds = \frac{\sqrt{2bgS.vdx}}{b \, v \, d \, x}$ ,  
 unde  $ds^2 = \frac{b \, v \, d \, x^2}{2g \, S. v \, d \, x} = \frac{x \, x \, d \, x^2}{x \, x - p \, p}$ , at-

quæ adeo  $\frac{b \, v \, v}{2g \, S. v \, d \, x} = \frac{x^2}{x \, x - p \, p}$  æquatio ad  
 tautochronam  $S \, T \, R$ , in quâ datâ lege vis cen-  
 tripetæ delebitur  $v$ .

*Exemplum.* Vis centripeta sit ut distantia  $a$   
 centro  $C$ , hoc est,  $g : v = a : x$ , adeoque  $v =$   
 $\frac{g \, x}{a}$ ,  $v \, d \, x = \frac{g \, x \, d \, x}{a}$ ,  $S. v \, d \, x = \frac{g \, x \, x}{2a} + Q$   
 (constantem) et quoniam positâ  $x = c$ , evanes-  
 cit  $S. v \, d \, x$ , erit  $Q = \frac{-g \, c \, c}{2a}$ , atque ita

$S. v \, d \, x = \frac{g \, x \, x - g \, c \, c}{2a}$ . Quarè erit  $s \, s =$

$\frac{2b}{g} S. v \, d \, x = \frac{b \, x \, x - b \, c \, c}{a}$ , et æquatio ad

tautochronam evadet  $\frac{b \, x \, x}{a \, x \, x - a \, c \, c} = \frac{x \, x}{x \, x - p \, p}$ ,  
 seu  $p \, p = \frac{b \, x \, x - a \, x \, x + a \, c \, c}{b}$ .

Jam si in hac æquatione ponatur  $b = a$ , erit  
 $p = c$ , et  $s \, s = x \, x = c \, c$ , ideoque tautochro-  
 na  $S \, R$  linea recta ad  $C \, R$  perpendicularis in  $R$ .

Si ponatur  $b$  major quàm  $a$ , et  $c = 0$ , erit  $p$   
 $= x \sqrt{\frac{b-a}{b}}$ , adeoque  $p$  ad  $x$  in ratione datâ,  
 cumque sit  $p$  seu  $C \, X$  sinus anguli  $C \, T \, X$ , ex-  
 istente radio  $x$  seu  $C \, T$ , erit angulus  $C \, T \, X$   
 constans, et proinde tautochrona  $S \, R$  spiralis  
 logarithmica.

Si fuerit  $b$  minor quàm  $a$ , et recta  $C \, S$  cur-  
 vam  $S \, R$  tangat in  $S$ , erit  $b = S \, R$ ; cùmque  
 sit  $s \, s = \frac{b \, x \, x - b \, c \, c}{a}$ , si ponatur  $s = S \, R$

$= b$ , et proinde  $x = a$ , fiet  $b b = \frac{b \, a \, a - b \, c \, c}{a}$ ,

et  $b = \frac{a \, a - c \, c}{a}$ . Jam si in æquatione ad

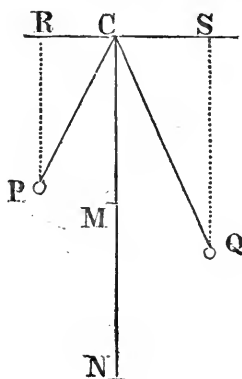
curvam  $S \, R$  loco  $b$  scribatur  $\frac{a \, a - c \, c}{a}$ , erit  $p \, p$

$= \frac{a \, a \, c \, c - c \, c \, x \, x}{a \, a - c \, c}$ , æquatio ad cycloidem, quæ

describitur rotatione circuli cujus diameter est  
 $R \, E$  seu  $a - c$  super concavam peripheriam  
 circuli centro  $C$  radio  $C \, E$  seu  $a$  descripti, ut li-  
 quet per n. 466.

*Schol.* In superioribus de pendulorum motu  
 propositionibus corporis penduli gravitatem in

centro seu puncto coactam et filum gravitatis  
 expers supposuimus, quæ pendulum simplex  
 constituunt. Quamobrem ne demonstratæ os-  
 cillationum leges in experimentis valdè pertur-  
 bentur, filum usurpandum est tenue cum globo  
 exiguo et ex materiâ gravissimâ conflato. Si  
 verò filum aut virga e quâ globus pendet gravis  
 fuerit et globus major, pendulum non amplius  
 simplex erit, sed compositum, quod pluribus pon-  
 deribus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum  $P \, C \, Q$ , onustum  
 quocumque pondusculis  $P$ ,  $Q$ , &c. quorum  
 commune gravitatis centrum  $M$  circâ punctum  
 suspensionis  $C$  oscilletur. Recta  $C \, M$  per  
 punctum suspensionis  $C$  et commune gravitatis  
 centrum  $M$  ducta vocatur axis penduli compo-  
 siti  $P \, C \, Q$ , recta verò  $R \, C \, S$  in puncto suspen-  
 sionis  $C$  ad axem penduli  $C \, M$  perpendicularis  
 dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli  
 compositi  $C \, M$ , capiatur  $C \, N$  æqualis longi-  
 tudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo  
 eodem tempore quo pendulum compositum

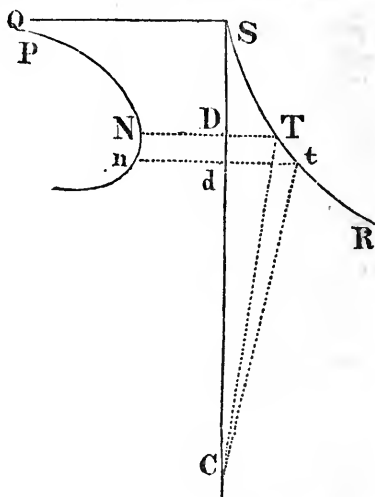
semper absolvens, pendulum illud sim-  
 plex composito  $P \, C \, Q$  synchronum vel etiam  
 isochronum dicitur, et punctum  $N$  centrum os-  
 cillationis penduli compositi  $P \, C \, Q$  appellatur.  
 Porrò si singulorum pondusculorum  $P$ ,  $Q$ , &c.  
 gravitas in punctis  $P$ ,  $Q$ , &c. collecta intelliga-  
 tur, et lineæ  $P \, C$ ,  $Q \, C$ , &c. gravitatis expertes  
 supponantur, sitque  $M$  summa pondusculorum  
 omnium  $P$ ,  $Q$ , &c. atque ex punctis  $P$ ,  $Q$ , &c.  
 ad axem oscillationis  $R \, C \, S$  demittantur per-  
 pendicula  $P \, R$ ,  $Q \, S$ , &c. erit  $C \, N =$   
 $\frac{P \times P \, R^2 + Q \times Q \, S^2}{M \times M \, C} +$ , &c. id est, si

pondera singula penduli compositi ducantur in  
 quadrata distantiarum suarum ab axe oscillatio-  
 nis, et summa productorum dividatur per id  
 quod fit ducendo ponderum summam in distan-  
 tiam centri gravitatis communis omnium ab eo-  
 dem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli  
 simplicis composito isochroni, sive distantia inter  
 axem et centrum oscillationis ipsius penduli com-  
 positi. Hoc pulcherrimum theorema quo line-

## PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendant et ascendent.*

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam STtR in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS et dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium illarum aliqua. Centro C intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ STtR occurrentes in T et t. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per Prop. XXXIX.) <sup>(1)</sup> Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli tTC directè; et velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, et ob datam Dd erit rectangulum Dd × DN, hoc est area DNnd, eidem tempori pro-



arum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus et Joannes Bernoulli, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. et Commentariis Paris. an. 1703. Hic verò in Actis Lipsiensibus et Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in Elementis Mechanicis. Hermannus quoque lib. 1<sup>o</sup>. Phoron. cap. 5<sup>o</sup>. et initio Tomi 3<sup>i</sup>. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematum demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 44. Prop. 22. distantiam centri oscillationis a puncto suspensionis in sphaerâ filo tenui suspensâ aequalem esse invenit longitudini fili cum radio sphaeræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphaeræ ac longitudine fili et radium ipsius, hoc est, si filum dicatur L, radius sphaeræ R, distantia centri oscil-

lationis a puncto suspensionis D, erit  $D = L + R + \frac{2 R R}{5 (L + R)}$ . Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Autor noster.

<sup>(1)</sup> \* Tempus autem quo corpus, &c. Nam, Tt, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè et velocitas inversè (5). Porro si centro T radio dato Dd, æquali differentie rectarum TC, tC circulus describi intelligatur, erit Tt secans anguli tTC, quare ob datum radium Dd erit semper Tt ut secans anguli tTC, atque adeo tempus quo describitur Tt erit ut illa secans directè et velocitas inversè. Sed datâ tangentē curvæ STtR in puncto T datur anguli CTC secans; undè dabitur DN proportionalis tempori quo describitur Tt.

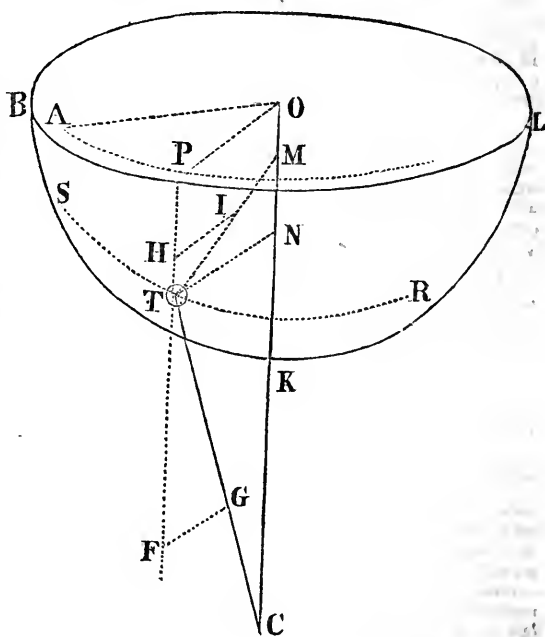
479. Exemplum. Centrum virium C, in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illius-



## PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

*Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, et a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela et æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur : dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.*

Sit B K L superficies curva, T corpus in eâ revolvens, S T R trajectory, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectory, O M K axis superficiei curvæ, T N recta a corpore in axem perpendicularis, O P huic parallela et æqualis a puncto O, quod in axe datur, educta; A P<sup>(m)</sup> vestigium trajectory a puncto P in lineæ volubilis O P plano A O P descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; T C recta a corpore ad centrum ducta; T G pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; T M recta ad superficiem curvam perpendicularis; T I pars ejus vi pressio- nis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M a superficie, proportionalis; P T F recta axi parallela per corpus transiens, et G F, I H rectæ a punctis G et I in parallelam illam P H T F perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area A O P, radio O P ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis T G (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires T F, F G; et vis T I in vires T H, H I:



<sup>(m)</sup> \* A P vestigium, &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex sin-

gulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.

Vires autem  $T F$ ,  $T H$  agendo secundum lineam  $P F$  plano  $A O P$  perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti  $P$ , quo trajectoriæ vestigium  $A P$  in hoc plano describitur, idem est ac si vires  $T F$ ,  $T H$  tollerentur, et corpus solis viribus  $F G$ ,  $H I$  ageretur; hoc est, idem ac si corpus in plano  $A O P$ , vi <sup>(n)</sup> centripetâ ad centrum  $O$  tendente et summam virium  $F G$  et  $H I$  æquante, describeret curvam  $A P$ . Sed vi tali describitur area  $A O P$  (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. e. d.

*Corol.* Eodem argumento si corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ  $C O$  datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam  $S T$ ; foret area  $A O P$  tempori semper proportionalis.

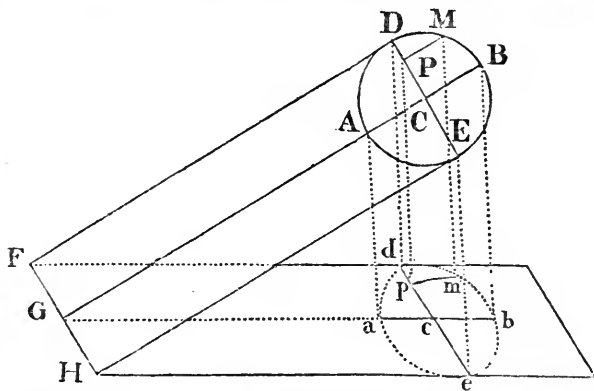
<sup>(n)</sup> \* Vi centripetâ ad centrum  $O$ , &c. Nam curva superficies  $B S K L$  genita supponitur revolutione curvæ lineæ  $B S K$  circa axem suum  $O C$ , undè sequitur lineas omnes  $P O$ ,  $H I$ ,  $T M$ ,  $F G$ ,  $P R$ ,  $C O$  esse in eodem plano, atquè ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum  $O$  juxta lineam  $P O$  dirigi.

480. *Lem.* Si linea recta  $A B$  projiciatur in planum  $F H e b d$ , projectio est linea recta  $a b$ , quæ est ad lineam  $A B$ , ut cosinus anguli inclinationis  $B G b$ , ad sinum totum. Nam si ex punctis  $A$ ,  $B$ , demittantur ad planum  $F H e b d$ , perpendiculara duo  $A a$ ,  $B b$ , patet planum  $A B b$ , esse ad planum  $F H e b d$  normale, adeoque perpendiculara omnia ex singulis lineæ  $A B$  punctis demissa, cadere in lineam rectam  $a b$ , quæ est communis intersectio planorum  $F H e b d$ ,  $A A B b$ . Q. e. 1<sup>um</sup>. Porro productis  $B A$ ,  $b a$  ut sibi occurrant in  $G$ , ob parallelas  $A a$ ,  $B b$ , erit  $a b$  ad  $A B$ , ut  $G b$  ad  $G B$ , id est, ut sinus anguli  $G B b$  sive cosinus anguli inclinationis  $B G b$ , ad sinum totum. Q. e. 2<sup>um</sup>.

481. *Corol.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis et parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, et ejus cosinus fit radius. Hinc si linea  $E D$ , ad rectam  $A B$  perpendicularis, fuerit

plano  $F H e b d$ , parallela, projectio illius  $e d$ , erit ipsi  $E D$  æqualis.

482. *Lemma.* Iisdem positis, si in plano  $D F H E B A$ , centro  $C$ , radio  $C D$ , describatur circulus  $D A E B$ , illius in planum  $F H e b d$  projectio  $d a e b$ , erit ellipsis cujus major axis  $d e$  æqualis erit diametro circuli  $D E$ , et ad minorem axem  $a b$ , rationem habeat sinûs



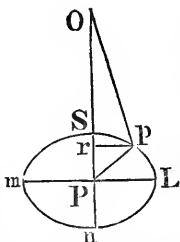
totius ad cosinum anguli  $B G b$ , inclinationis planorum. Agatur enim  $P M$  ordinatim ad diametrum circuli  $D E$ , et projiciatur in rectam  $P m$ , erit  $d p = D P$ , et  $p e = P E$  (481) atque  $p m$  ad  $P M$ , ut sinus anguli  $P M m$ , seu anguli  $A B b$ , ad sinum totum (480) hoc est, ut  $a b$ , ad  $A B$  seu  $d e$ , adeoque  $p m^2 : P M^2 = a b^2 : d e^2$ , sed ex naturâ circuli  $P M^2 = D P \times P E = d p \times p e$ , Ergo  $p m^2 : d p \times p e = a b^2 : d e^2$ . Est igitur  $a e b d$ , ellipsis. Cætera patent per Lemma superius et ejus Corol.

## PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

*Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centri-petæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectory quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.*

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus

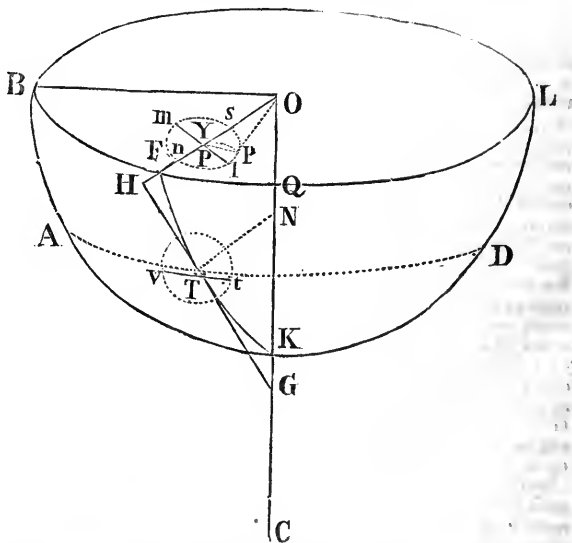
483. *LEM.* Sint ellipseos datæ  $L S m$  n axes  $L m$ ,  $S n$ , centrum  $P$ ,  $O$  punctum in axe  $n S$  producto datum,  $p$  punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli  $O p P$ , dabitur perpendicularum  $p r$ , ex puncto  $p$ , ad trianguli basim datam  $P O$  demissum et hinc ex naturâ ellipseos dabitur  $r P$ , atque ob angulum rectum ad  $r$ , dabitur  $P p$ , et indè punctum  $p$  in perimetro cum angulo  $O P p$ , et positione rectæ  $O p$ .



484. *Lemma.* Superficies curva  $B A T K L$ , describatur revolutione curvæ  $B A K$  circâ axem suum immobilem  $O C$ , et singula curvæ illius puncta  $B$ ,  $A$  circulos  $B Q L$ ,  $A T D$  describent; cum curva  $B A K$  pervenit ad situm  $F T K$ , et punctum  $A$  ad  $T$ , agantur recta  $G T H$  curvam  $FTK$  tangens in  $T$  et axem secans in  $G$ , ac rectâ  $v T t$  circulum  $A T D$  tangens in eodem puncto  $T$ , sitque  $G T H$ , in plano curvæ  $O F K$ , et  $v T t$ , in plano circuli  $A T D$ . Manifestum est planum quod superficiem curvam  $B A T K L$  tangit in  $T$ , convenire cum plano in quo sunt rectæ  $G T H$ ,  $v T t$ ; et si fuerit  $O$  centrum circuli  $B F Q L$ , et ducatur radius  $O F$  tangenti  $G T$  occurrens in  $H$ , angulum  $G H O$  fore æqualem angulo inclinationis plani circuli  $B Q L O$ , ad planum quod superficiem curvam tangit in  $T$ ; Ducto autem circuli  $A T D$  radio  $T N$ , fore angulum  $G T N$ , æqualem angulo inclinationis  $G H O$ .

485. *Corol. 1.* Iisdem positis, si centro  $T$ , radio quam minimo  $T t$ , circellus in superficie curvâ  $B A T L$  describatur, circellus ille evanescens erit in plano superficiem curvam tangente, in  $T$ , adeoque angulus inclinationis plani  $B O L Q$ , ad planum circelli evanescens productum, æqualis erit angulo  $G T N$ , (484).

486. *Corol. 2.* Si circellus radio  $T t$  descriptus projiciatur in planum  $B O L Q$ , illius projectio  $l s m n$ , erit ellipsis (482) cujus axis major  $l m$  æqualis est et parallelus circelli diametro  $v T t$ , quæ pars est evanescens circuli  $A T D$ , axis minor  $s n$  pars radii  $O F$ , et  $l m$  erit ad  $s n$  ut  $T G$  ad  $T N$ . Est enim circuli peripheria  $A T D$  adeoque et pars illius  $v T t$ , plano  $B F L O$  parallela; Quare (481) diametri  $v T t$  projectio  $m l$ , erit linea parallela et æqualis ipsi  $v t$ ; erit quoque  $l m$ , ad radium  $O P F$

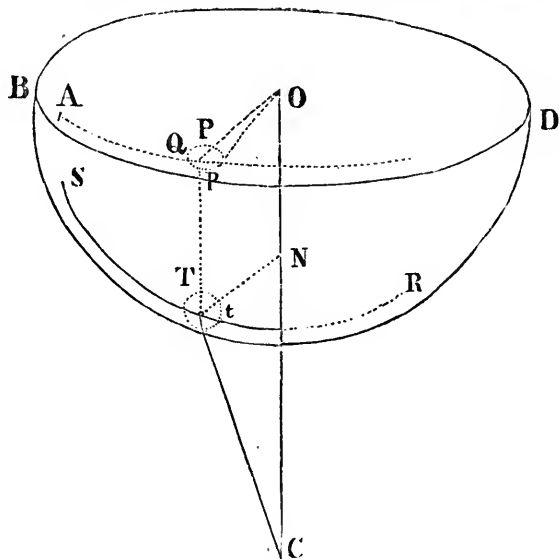


normalis, ob  $v t$  ad  $T N$  perpendicularem, proindeque axis minor ellipsos  $s n$  erit pars radii





portionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus  $P O p$ . Et inde dabitur ellipseos et rectæ  $O p$  intersectio communis  $p$ , unâ cum angulo  $O P p$  in quo trajectorye vestigium  $A P p$  secat lineam  $O P$ . (<sup>r</sup>) Inde verò (conferendo Prop. XLI cum Corol. suo 2.) ratio determinandi



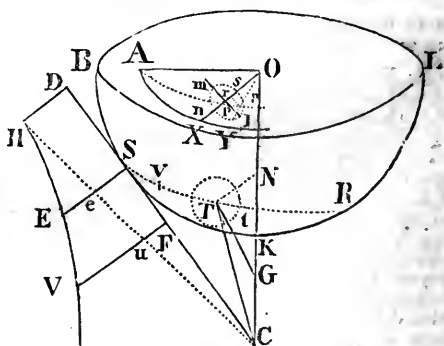
curvam  $A P p$  facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis  $P$ , erigendo ad planum  $A O P$  perpendiculara  $P T$  superficie curvæ occurrentia in  $T$ , dabuntur singula trajectorye puncta  $T$ . Q. e. i.

gulus  $P O p$ , et inde dabitur ellipseos et rectæ  $O p$  intersectio communis  $p$ , unâ cum angulo  $O P p$  (483).

(<sup>r</sup>) 487. *Inde verò, &c.* Sit  $D$  locus in rectâ  $C S$  productâ, de quo corpus vi centripetâ ad  $C$  tendente cadendo acquirit in loco  $S$  velocitatem cum quâ trajectoryam  $S T R$  incipit describere. In linea  $C S$ , capiatur  $C F = C T$ , et per puncta  $F, S, D$ , erigantur ad  $C D$  perpendiculara  $F V, S E, D H$  vi centripetâ in illis locis proportionalia, sitque  $H E V$  linea quam punctum  $V$  perpetuò tangit. Per punctum  $T$ , agatur  $T G$ , quæ curvam cujus revolutione describitur superficies  $B S T K L$ , tangat in  $T$ ; sitque eadem  $T G$  in curvæ illius plano, et producta, axi  $O C$  occurrat in  $G$ , velocitates in locis  $S$ , et  $T$ , seu  $F$ , erunt ut  $\sqrt{D H E S}$ , et  $\sqrt{D i l V F}$ . (Per 1<sup>am</sup>, partem Prop 39.)

Et quoniam area  $P O p$ , seu  $\frac{P O \times P p}{2}$  est ut

tempus quo describitur  $T t$  sive  $P l$ , erit  $P l$ , ut  $P O \times p r \sqrt{D H V F}$  hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas et tempus con-



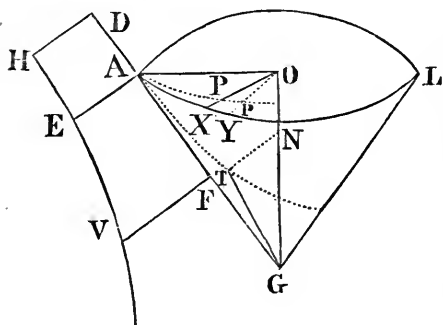
unctim (5). Quare si detur quantitas  $B$  erit  $P l = B \times P O \times p r \times \sqrt{D H V F}$ . Est





tantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendiculara D H, A E, F V vim centripetam in locis singulis D, A, E, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam

$TG = \frac{fx}{r}$  erit vis centripeta in loco T vel F ut  $\frac{r^3}{f^3 x^3}$ , adeoque si fuerit n quantitas data, vis



centripeta supponi poterit  $= \frac{n^4}{x^3}$ . Sit D G =

in, et erit (431) area DHVF  $= \frac{n^4 (mm - xx)}{mmxx}$   
 $= \frac{kkmm - kxx}{xx}$ , ponendo  $\frac{n^4}{mm} = kk$ .

Quare si dicatur area D H E A = p p, erit

$POp = \frac{Cpfx dx}{2r \sqrt{kkmm - kxx - CCpp}}$

$= \frac{qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$  ponendo  $kkmm - CCpp$

$= kkh h$ , et  $\frac{Cpf}{2rk} = q$ . Similiter invenietur

$OXY = \frac{rrqdx}{x \sqrt{hh - xx}}$ . Quoniam autem

crescentibus areis A P O, A X O, decrescit

P O, seu x, scribendum est  $POp = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$

et  $OXY = \frac{-rrqdx}{x \sqrt{hh - xx}}$ . Fiat  $\sqrt{hh - xx}$

$= z$ , et erit  $hh - xx = zz$  et  $-xdx =$

$zdz$ , et  $POp = qdz$ , sumptisque fluentibus

et additâ constanti Q, erit A P O =  $qz + Q$

$= q \sqrt{hh - xx} + Q$ . Porro area A P O

evanescit ubi P O, seu  $x = A O = r$ , quare o

$= q \sqrt{hh - rr} + Q$ , et hinc  $Q = -q \sqrt{hh - rr}$ , proindeque A P O =  $q \sqrt{hh - xx}$

$- q \sqrt{hh - rr}$ . Et dato igitur tempore

quo corpus describit A T, geometricè invenietur

longitudo lineæ P O. Ponatur nunc  $x = \frac{h}{y}$

et erit  $-dx = \frac{h dy}{y^2}$ ,  $hh - xx$

$$= \frac{h h y y - h^4}{y^2}, \sqrt{h h - x x} = \frac{h \sqrt{y^2 - h^2}}{y}$$

$$\text{atque adeo } OXY = \frac{-rrq dx}{x \sqrt{h h - x x}} = \frac{rrq dy}{h \sqrt{y^2 - h^2}}$$

$$\text{Sit } \frac{rrq}{h h} = \frac{1}{2} s, \text{ et erit } OXY = \frac{1}{2} \frac{s h dy}{\sqrt{y y - h h}}$$

Undè habetur constructio sequens.

Centro O, semiaxe transverso O A Q  
 $= h$ , semiaxe conjugato  $= s$ , describatur  
hyperbola Q M N, ex illius perimetri  
puncto quovis N, demittatur ad axem  
O Q, perpendicularum N K, et abscissa  
O K dicatur y, ductaq; recta N L, quæ  
hyperbolam tangat in N, et axi occurrat  
in L, erit (ex conic.) O K (y) : O Q (h)

$$= O Q (h) : O L = \frac{h h}{y} = x, \text{ et sec-}$$

$$\text{tor hyperbolicus } O N Q = S. \frac{1}{2}$$

$$\frac{s h dy}{\sqrt{y y - h h}} \text{ (427) atque adeo } A X O$$

$$= O N Q + Q \text{ constante. Si ponatur } x,$$

$$\text{seu } \frac{h h}{y} = O A = r, \text{ hoc est } y = \frac{h h}{r}$$

evanescet area A X O, quare si capiatur

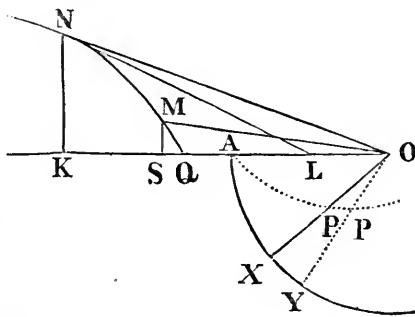
$$O S = \frac{h h}{r} \text{ et ad axem erigatur perpendicularum}$$

S M, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque

O M, erit o = O M Q + Q, et Q = -

O M Q, undè A X O = O N Q - O M Q

= O N M. Sumatur itaque sector circuli



O A X = sectori hyperbolico O N M, et in ra-  
dio O X capiatur O P = O L, erit P punctum  
in vestigio seu curvæ A P p. Hinc si ex dato  
tempore quærat locus T (vid. fig. super.) in  
trajectoria T R, inveniat primum longitudo  
O P, seu O L, tum agatur L N tangens hyper-  
bolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur sec-  
tor circularis A X O = sectori hyperbolico  
O N M, et in radio O X, capiatur O P = O L,  
ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum  
A O P (vid. fig. super.) perpendicularum P T,  
quod superficiè conicæ occurret in loco quæsito T.



## SECTIO XI.

*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.*

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; et corporum trahentium et attractorum actiones semper mutue sunt et æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed <sup>(\*)</sup> ambo (per legem Corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: et si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, et idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; et propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

## PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

*Corpora <sup>(\*)</sup> duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuò, figuras similes.*

Sunt <sup>(u)</sup> enim distantie corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, et componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantie circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclina-

(\*) \* Sed ambo (per leg. Corol. 4.) quam attractione mutuâ vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.

(<sup>u</sup>) \* Corpora duo. (Vid. fig. in sub. pag.) Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circa commune gravitatis centrum C,

pergendo de S ad T et de P ad Q, similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum P Q C, S T C, quas corpora S et P circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura p q T quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, et figura  $\pi$  T Q, quam S circa P similiter spectatum describit.

(<sup>c</sup>) \* Sunt enim distantie corporum a com-

tionem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, et æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ unâ cum his terminis vel quiescunt, vel <sup>(a)</sup> motu quovis non angulari moventur, describunt omninò similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiiis circumactis describuntur. Q. e. d.

### PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

*Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune : dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.*

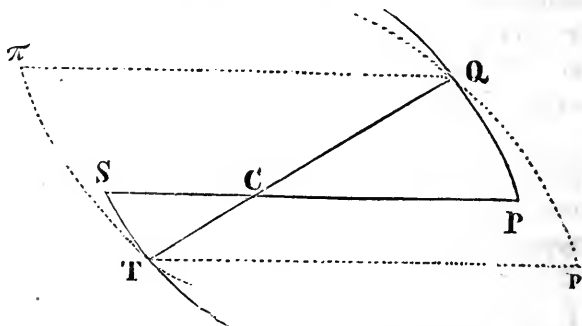
Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, peragendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto S ipsius S P, T Q æqua-

muni gravitatis centro Q C, C T reciprocè proportionales corporil'us dotis P, S (60) atque idè in datâ ratione ad invicem, Q C est ad Q T in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Feruntur autem distantie Q C, T C, circa centrum C terminum suum communem æquali motu angulari, id est, angulus Q C P est semper æqualis angulo T C S propterea quod distantie Q C, T C in directum semper jacent (60). Quare (112) duæ figuræ P Q C, S T C similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta T p lineæ S P æqualis et parallela, et si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatus esset in locum Q, eritque Q T ad T p seu S P, ut Q C ad C P, et angulus Q T p = Q C P unde figura p Q C circa punctum S ut immotum spectatum a corpore P descripta erit similis figuræ P Q C ideoque et figuræ S T C, simili ratiocinio ostendetur figuram  $\pi$  T Q circa punctum P immotum a corpore S descriptam, esse similem figuræ S T C ideoque et figuræ P Q C. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur, si ponamus in corpore S spectatorem qui se et lineam S P tanquam immota habeat, in hac enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea

S P, quæ tanquam immota spectatur erit T p ipsi S P æqualis et parallela et spectator in T

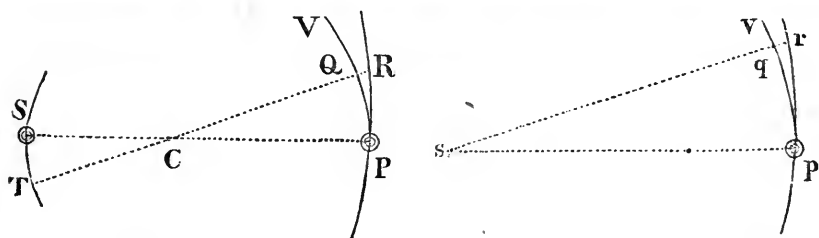


locatus motum corporis P videbit sub angulo Q T p = Q C P, et ad distantiam T Q. Cum igitur sit semper Q C ad C P, ut Q T ad S P, seu T p, et angulus Q C P, æqualis angulo Q T p, figura p Q T, similis erit figuræ P Q C, adeoque et figuræ S T C. Pariter si per Q agatur Q  $\pi$  æqualis et parallela P S liquet figuram  $\pi$  T Q quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem et æqualem figuræ p Q T quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

<sup>(a)</sup> \* Motu quovis non angulari. Vide Lemma Corol. 5. et 6.



les et parallelæ ducantur semper  $s p$ ,  $s q$ ; et curva  $p q v$ , quam punctum  $p$  revolvendo circum punctum immotum  $s$  describit, (<sup>b</sup>) erit similiis et



æqualis curvis, quas corpora  $S$ ,  $P$  describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. XX.) similis curvis  $S T$  et  $P Q V$ , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum  $C$ : idque quia proportion- nes linearum  $S C$ ,  $C P$ , et  $S P$  vel  $s p$  ad invicem dantur.

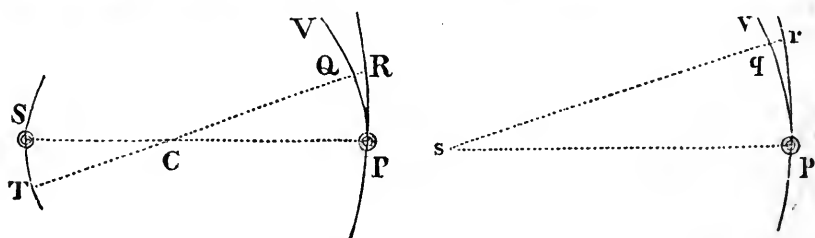
*Cas. 1.* Comune illud gravitatis centrum  $C$ , per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque  $s$  et  $p$  locentur corpora duo, immobile in  $s$ , mobile in  $p$ , corporibus  $S$  et  $P$  similia et æqualia. Dein tangent rectæ  $P R$  et  $p r$  curvas  $P Q$  et  $p q$  in  $P$  et  $p$ , et producantur  $C Q$  et  $s q$  ad  $R$  et  $r$ . Et ob similitudinem figurarum  $C P R Q$ ,  $s p r q$  erit  $R Q$  ad  $r q$  ut  $C P$  ad  $s p$ , ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus  $P$  versus corpus  $S$ , atque ideo versus centrum intermedium  $C$  attrahitur, esset ad vim, quâ corpus  $p$  versus centrum  $s$  attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus  $P R$ ,  $p r$  ad arcus  $P Q$ ,  $p q$  per intervalla ipsis proportionalia  $R Q$ ,  $r q$ , ideoque vis posterior efficeret, ut corpus  $p$  gyraretur in curvâ  $p q v$ , quæ similis esset curvæ  $P Q V$ , in quâ vis prior efficit, ut corpus  $P$  gyretur; et revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione  $C P$  ad  $s p$ , sed (ob similitudinem et æqualitatem corporum  $S$  et  $s$ ,  $P$  et  $p$ , et æqualitatem distantiarum  $S P$ ,  $s p$ ) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: et propterea, ut corpus posterius  $p$  trahatur per intervallum majus  $r q$ , requiritur tempus majus, (<sup>c</sup>) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso

(<sup>b</sup>) \* *Erit similis et æqualis curvis, ut patet ex demonstratione propositionis superioris.*

(<sup>c</sup>) *Idque in subduplicatâ ratione intervallorum.* Nascentibus arcibus,  $q$ ,  $P Q$  tempora quibus describuntur intervalla  $r q$ ,  $R Q$  sunt in

subduplicatâ ratione eorundem intervallorum, per Lem. X. Quare si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes  $p q$ ,  $P Q$  æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur  $V$ ,  $v$ , tempora  $T$ ,  $t$ , erit  $T^2 : t^2 = r q : R Q =$

motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis  $p$  esse ad velocitatem corporis  $P$  in subduplicatâ



ratione distantiae  $s p$  ad distantiam  $C P$ , eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus  $p q$ ,  $P Q$ , qui sunt in ratione integrâ: Et corpora  $P$ ,  $p$  viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia  $C$  et  $s$  figuras similes  $P Q V$ ,  $p q v$ , quarum posterior  $p q v$  similis est et æqualis figuræ, quam corpus  $P$  circum corpus mobile  $S$  describit. Q. e. d.

*Cas. 2.* Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unâ cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; et (per legum Corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, et propterea figuræ  $p q v$  similes et æquales. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc corpora duo, viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, ellipses concentricas; et vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires <sup>(d)</sup> distantiae proportionales.

*Corol. 2.* Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionalibus, describunt (per Prop. XI. XII. XIII.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiae reciproce proportionales.

$s p : C P = p q : P Q$ , est verò (5)  $V : v = \frac{p q}{T} : \frac{P Q}{t}$  sive ut  $\frac{T^2}{t^2} : \frac{t^2}{T^2}$ , adeoque  $V : v = T : t = \sqrt{s p} : \sqrt{C P}$ . Itaque corpora  $P$ ,  $p$ , viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia  $C$ ,  $s$ , nascentes figuras similes  $P Q$ ,  $p q$ , adeoque et figuras quasvis similes  $P Q V$ ,  $p q v$ , describent temporibus et velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium  $C P$ ,  $s p$ . Est autem (ex Dem.) figura  $p q v$ , similis et æqualis figuræ quam corpus  $P$ ,

circum corpus mobile  $S$ , (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circa centrum  $C$ , describit figuram similem  $P Q V$ .

<sup>(d)</sup> • *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus  $p$ , circa  $s$ , et corpora duo  $P$ ,  $S$ , circa commune gravitatis centrum  $C$ , et circum se mutuo figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per Prop. X.) figura  $p q v$ , ellipsis cujus centrum  $S$ , liquet veritas corollarii.

*Corol. 3.* Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gy-  
rantia, radiis et ad centrum illud et ad se mutuò ductis, (°) describunt  
areas temporibus proportionales.

## PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

*Corporum duorum S et P, circa commune gravitatis centrum C revolvantium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyantis, et figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem et æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P.*

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes  $PQ$  et  $pq$  describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum  $CP$  et  $SP$  vel  $sp$ , hoc est, in subduplicatâ ratione corporis  $S$  ad summam corporum  $S + P$ . Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes  $PQ$  et  $pq$  describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. Q. e. d.

## PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

*Si corpora duo S et P, viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvantur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum S.*

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora pe-

(°) • Describunt areas temporibus proportionales. Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes  $s p q$ ,  $CPQ$ , et  $s p v$ ,  $CPV$ , sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium  $s p$ ,  $CP$  (ex Dem.) et proindè tempus quo describitur area  $s p q$ , est ad tempus quo describitur area  $s p v$ , ut tempus quo describitur area  $CPQ$ , ad tempus quo describitur area  $CPV$ ; sed (per Prop. 1.) tempora quibus describuntur areæ  $s p q$ ,  $s p v$ , sunt areis illis adeoque et areis similibus  $CPQ$ ,  $CPV$  proportionalia, ergò areæ  $CPQ$ ,  $CPV$  sunt ut tempora quibus describuntur; et quo-

niam areæ quas corpora  $S$ ,  $P$  circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

(f) Nam si descriptæ ellipses, &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora  $S$ ,  $P$  circum se mutuò describunt (ut ad Prop. 57 exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos,  $p q v$ , quam corpus  $p$  vel  $P$ , circa corpus  $s$  vel  $S$ , reverà immotum describit (ut in Prop. 58.) Hic axis dicatur  $A$ , tempus periodicum quod in ellipsis quatuor quas corpora  $S$ ,  $P$  circum  $C$

riodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum  $S + P$ . Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, et tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad  $S + P$  est triplicata, ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter  $S + P$  et S ad  $S + P$ . Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut  $S + P$  ad primum duorum mediè proportionalium inter  $S + P$  et S. Q. e. d.

### PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

*Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum a centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.*

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, <sup>(6)</sup> tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem sunt, ac si a corpore intermedio manarent. Q. e. d.

Et quoniam datur ratio distantiae corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantia et quantitatis datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, et quantitatis totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit di-

et circum se mutuò describunt (ut in Prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q v, quam corpus p, vel P, circa corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in Prop. 58.) describit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circa alterum S vel s reverâ immotum (ut in Prop. 53.) describere posset tempore periodico t, erit (per Prop. 59.)  $T^2 : t^2 = S + P : S$ . et (per Prop. 15.)  $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$ , quare  $A^3 : X^3 = S + P : S$ . Jam si capiantur duæ quantitates B,

C mediæ proportionales inter  $S + P$  et S, erit  $S + P$  ad S in ratione triplicatâ  $S + P$ , ad B, hoc est  $S + P : S = (S + P)^3 : B^3$ , ac proinde  $A^3 : X^3 = (S + P)^3 : B^3$ , ideoque  $A : X = S + P : B$ . Q. e. d.

<sup>(6)</sup> \* Tendunt ad commune gravitatis centrum, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolvantia jungunt, et secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

rectè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc distantia et quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hâc distantia et analogis quantitatibus datis similiter derivata. <sup>(b)</sup> Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiae utriusque. Q. e. d.

## PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionabilibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.*

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; et centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; et propterea (per legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prop. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, et habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. Q. e. i.

## PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiae suæ reciproce proportionabilibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.*

<sup>(i)</sup> Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut et motus spatii, quod unà cum hoc centro move-

<sup>(b)</sup> \* Hoc est, vis trahentis eadem erit lex, &c. Sit (in fig. Prop. 58.)  $TQ = x$ ,  $CQ = y$ , et  $x$  ad  $y$  in ratione datâ  $a$  ad  $b$ , seu  $x = \frac{ay}{b}$ , vis quâ corpora  $S$ ,  $P$  in locis  $T$ ,  $Q$  se mutuò trahunt sit ut  $x^m$ , erit  $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$ , adeoque eadem vis etiam ut  $y^m$ , ob datam rationem  $a^m$  ad  $b^m$ , cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum  $C$  urgentur, erit quoque vis ad  $C$  tendens ut  $y^m$ . Sit nunc vis quâ corpora se mutuò

trahunt ut  $c x^n + e x^m$ , et  $c$ ,  $e$  quantitates datæ, erit  $c x^n + e x^m = \frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$ , ideòque vis ad  $C$  tendens ut  $\frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$ .

<sup>(i)</sup> \* Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) et hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro et eadem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.

tur uniformiter in **directum**, nec non corporum motus **initiales respectu** hujus spatii. **Motus** autem subsequentes (per legum corollarium quintum, et **theoremata novissimum**) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum una cum communi illo gravitatis centro quiesceret, et corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in **centro illo traherentur**. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio **mobili**, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, et vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (<sup>h</sup>) determinandus est motus per problema nonum, et vicesimum sextum: et (<sup>l</sup>) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (<sup>m</sup>) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii et corporum in eo gyantium motus progressivus supra inventus, et habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili.

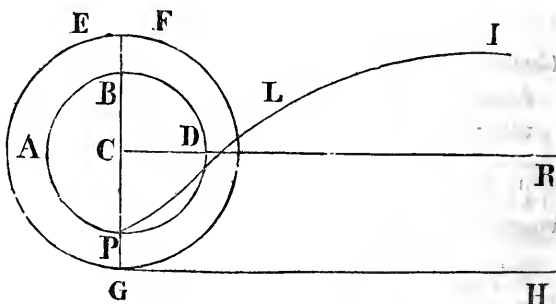
Q. e. i.

(\*) \* *Determinandus est motus per Probl. 9.*  
*si corpora projiciantur secundum directionem*  
*quæ cum eorum distantia non coincidat, et per*  
*Probl. 26. si coincidat directio projectionis cum*  
*distantia corporum.*

(1) • *Et habebitur simul motus corporis alterius* e regione, si ex corpore cuius locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ita determinetur ut sit corpus cuius locus quæritur ad corpus aliud ut distantia data huius a centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo huius rectæ erit locus corporis quæsitus (60).

(<sup>m</sup>) 495. Cum hoc motu componendus est, &c. In hypothesis hujus problematis, corpora duo circa commune gravitatis centrum seu umbilicum sectiones conicas describunt (per Cor. 2. Prop. 58.) et satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratiâ, corpus P circulum P A B D uniformiter describat interaeum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æqualiter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli periphæria revolvitis, rota G E F centro C et radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circa axem suum, et punctum P in plano circuli G E F immotum describit intercâ trochoicæ P L I quæ

erit trajectory quam corpus P motu absoluto  
describit; (ut patet ex Prop. 31. et not. 367).  
Hâc enim ratione centrum C percurrit spatium  
 $CR = GH =$  semiperipheria rotæ GEF,  
eodem tempore quo punctum P reuolvitur per  
totam semiperipheriam PAB; critique proinde  
velocitas centri C per lineam CR ad veloci-  
tatem puncti vel corporis P in periphèria circuli  
PAB ut semirota ad semicirculum, hoc est. ut  
radius CG ad radium CP. Hinc si velocitas  
centri C æqualis sit velocitati corporis P in cir-  
culo suo reuolvens, trochois PLI erit cyclois  
vulgaris; si velocitas centri C major extiterit,



erit  $P L I$  trochois oblongata, si velocitas centri  
C minor, erit  $P L I$  trochois decurtata.

Sit nunc  $A$   $P$  sectio quavis conica cujus vertex  $A$ , umbilicus seu virium et gravitatis commune centrum  $C$ , axis transversus  $A$   $C$ , centrum  $C$  uniformiter moveatur in recta  $D$   $R$  positione data, et cum illo planum curvae  $A$   $P$   $C$ , ita transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis  $A$   $C$ , rectae  $B$   $D$ , positione datae sit semper parallelus. Dum corpus  $P$  in curva  $A$   $P$  revolvitur, et cum centro  $C$  in recta  $D$   $R$  movetur, describitur

## PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

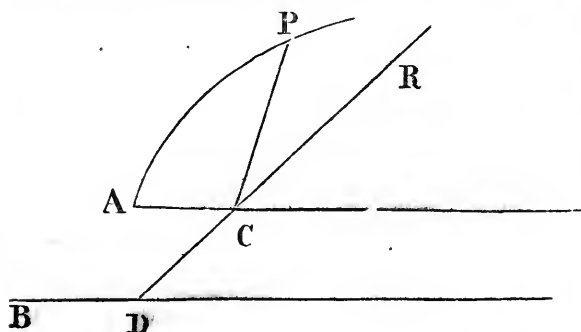
*Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centrīs : requiruntur motus plurium corporum inter se.*

Ponantur primo corpora duo T et L (*Vid. fig. seq. pag.*) commune habentia gravitatis centrum D. Describent hæc (per Corollarium pri-

vens est in vertice A, sit C in D et A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ D R, dabitur spatium D C quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ A P,

que B A = D C = x —  $\frac{y y}{4 p} = \frac{4 p x - y y}{4 p}$ ,  
C M (sive A M — A C) =  $\frac{y y - 4 p p}{4 p}$ . Porro

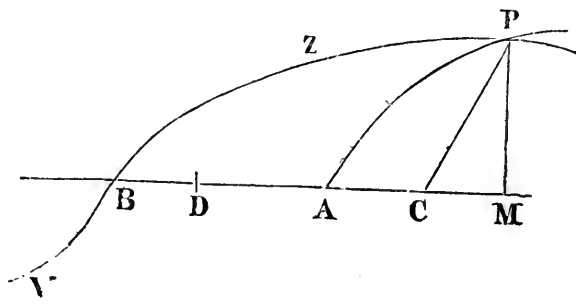
(ex Archimede Prop. 17. de quadr. Parab. quæ est Theor. 4<sup>um</sup>. de Parabolâ) area A P M =  $\frac{2}{3}$  A M  $\times$  P M =  $\frac{2 y^3}{12 p}$ , area trianguli C P M =  $\frac{1}{2}$  C M  $\times$  P M =  $\frac{y^3 - 4 p p y}{8 p}$ ; undè area A P C = A P M — C P M =  $\frac{y^3 + 12 p p y}{24 p}$ .  
Est autem area A P C, tempori quo describitur proportionalis, seu ut



capitur (per Prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area A P C rectæ datæ D C seu tempori proportionalis et obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectorye quam corpus P in plano hujus schematis immoto describit.

Sit A P parabola, et umbilicus C, cum plano A P C uniformi motu progrediatur in axe B C, dum corpus Pest in vertice parabolæ A, sit umbilicus C in D et vertex A in B, et trajectory B Z P, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto describit erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit A C, seu B D = p, et proinde parabolæ A P, latus rectum = 4 p (per Theor. 2<sup>um</sup>. de Parabolâ). P M ad axem A B ordinatim applicatâ = y, B M = x, erit (ex naturâ Parabolæ, ver Theor. 1<sup>um</sup>. de Parabolâ) A M =  $\frac{y y}{4 p}$ , adeo-

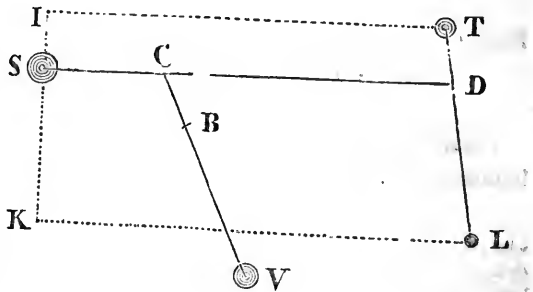
linea D C vel B A =  $\frac{4 p x - y y}{4 p}$ , quare si fuerit  $\frac{a}{6}$  quantitas constans, erit  $\frac{y^3 + 12 p p y}{24 p} = \frac{4 a p x - a y y}{24 p}$ , hoc est  $y^3 + a y y + 12 p y y = 4 a p x$ , æquatio ad parabolam cubicam B Z P, quæ crura habet contraria B Z, B V in infinitum progredientia.



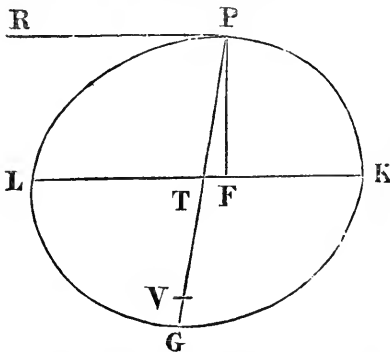
mun. Theorematis 21.) ellipses centra habentes in D, quarum magnitudo (<sup>n</sup>) ex Problemate V. innotescit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T et L viribus acceleratricibus S T, S L, et ab ipsis vicissim trahatur. Vis S T, (per legem Corol. 2.) resolvitur in vires S D, D T; et vis S L in vires S D, D L. Vires (<sup>o</sup>) autem D T, D L, quæ sunt ut

ipsarum summa T L, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T et L se mutuø trahunt, additæ his viribus corporum T et L, prior priori et posterior posteriori, componunt vires distantis D T ac D L proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per Corol. 1. Prop. X. et Corol. 1. et 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices S D et S D, (<sup>p</sup>) actionibus motricibus  $S D \times T$  et  $S D \times L$ , quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter et secundum lineas T I, L K,



(<sup>n</sup>) 494. Ex Problemate V. innotescit. Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate et secundum datam directionem P R



ut ellipsim P L G K, circâ centrum T datum describat, recta P R positione data ellipsim tanget in P, ideoque diameter L K, ipsi P R parallela (Prop. 32. Lib. I. Conic. Apoll. sive Lem. IV. de Conic. et Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Præterea, si ex puncto P ad

diametrum L K demittatur perpendicularum P F, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem P T ad partem vis illius quæ juxta directionem P F, agit, ut P T ad P F, proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxta directionem P F urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ P R, ad P F perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P, quam corpus P cum hac velocitate atque vi centripetâ potest describere (199.) et hinc dabitur altera diameter conjugata L K, et ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 98).

(<sup>o</sup>) • Vires autem D T, D L, quæ sunt ut ipsarum summa T L, &c. Est enim D T ad T L in ratione datâ corporis L ad summam corporum T + L, et D L ad T L, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T + L (60); quare vires D T, D L, in quâcumque positione corporum T et L, sunt ut T L.

(<sup>p</sup>) • Actionibus motricibus  $S D \times T$ , et  $S D \times L$  (per def. 8. et not. 12.) quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter ob æqualem vim acceleratricem S D, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.



ipsi  $D S$  parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam  $I K$ ; quam ductam concipe per medium corporis  $S$ , et lineæ  $D S$  perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam  $I K$  accessus <sup>(q)</sup> faciendo ut systema corporum  $T$  et  $L$  ex unâ parte, et corpus  $S$  ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum  $C$ . <sup>(r)</sup> Tali motu corpus  $S$ , eo quod summa virium motricium  $S D \times T$  et  $S D \times L$ , distantia  $C S$  proportionalium, tendit versus centrum  $C$ , describit ellipsin circa idem  $C$ ; et punctum  $D$ , ob proportionales  $C S$ ,  $C D$ , describet ellipsin consimilem e regione. Corpora autem  $T$  et  $L$  viribus motricibus  $S D \times T$  et  $S D \times L$ , prius priore, posterius posteriore, æqualiter et secundum lineas parallelas  $T I$  et  $L K$ , ut dictum est, attracta, pergunt (per legum Corollarium quintum et sextum) circa centrum mobile  $D$  ellipses suas describere, ut prius. Q. e. i.

Addatur jam corpus quartum  $V$ , et <sup>(s)</sup> simili argumento concludetur hoc et punctum  $C$  ellipses circa omnium commune centrum gravitatis  $B$  describere; manentibus motibus priorum corporum  $T$ ,  $L$  et  $S$  circa centra  $D$  et  $C$ , sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere libebit. Q. e. i.

<sup>(t)</sup> Hæc ita se habent, etsi corpora  $T$  et  $L$  trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt mutua omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantia ductæ in corpora trahentia, et <sup>(u)</sup> ex præcedentibus faciliè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum  $B$ , in plano immobili describunt. Q. e. i.

<sup>(q)</sup> \* *Faciendo ut systema corporum  $T$ , et  $L$ , (seu  $D$  centrum gravitatis commune ipsorum) ex unâ parte, et corpus  $S$  ex alterâ, justis cum velocitatibus in dato plano secundum directiones parallelas et contrarias impressis gyrentur circa  $C$  commune gravitatis centrum trium corporum.*

<sup>(r)</sup> \* *Tali motu corpus  $S$ , &c. Corpus  $S$  a corporibus  $T$  et  $L$  trahitur viribus quæ sunt inter se ut  $S T \times T$  et  $S L \times L$  (ex hyp.) et per resolutionem virium corpus  $S$  a corporibus  $T$  et  $L$  versus  $D$  et  $C$  juxta directionem  $S D$  seu  $S C$  trahitur viribus quæ sunt inter se ut  $S D \times T$  et  $S D \times L$ , hoc est, vi quæ est ut  $S D \times T + L$ , adeoque ut  $S D$ , ob datam corporum summam  $T + L$ , et ut  $C S$ , ob datam rationem  $S D$  ad  $C S$ , (61). Corpus idem  $S$  juxta directiones oppositas ipsis  $D T$ ,  $D L$  parallelas, trahitur viribus quæ sunt inter se ut  $D T \times T$  et  $D L \times L$ , hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proinde nullam mutationem producant. Quare cum sys-*

tema corporum  $T$  et  $L$ , seu ipsorum commune centrum gravitatis  $D$ , versus  $S$  seu  $C$  trahatur quoque vi quæ est ut  $S D$ , ac proinde ut  $C D$  (61), patet quod corpus  $S$ , ex unâ parte, et punctum  $D$  ex alterâ describant circum  $C$  ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut supra dictum est, projiciantur.

<sup>(s)</sup> \* *Simili argumento, considerando corpora  $T$  et  $L$  tanquam corpus unicum in centro  $D$  positum, concludetur, &c.*

<sup>(t)</sup> \* *Hæc ita se habent. Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora  $T$  et  $L$  ad distantiam datam trahunt corpus  $S$ , esse aequales viribus acceleratricibus quibus se mutuo ad eandem distantiam trahunt. Unde manet demonstratio, etsi corpus  $S$  a corpore v. gr.  $T$  ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus  $L$  ad eandem distantiam.*

<sup>(u)</sup> \* *Et ex præcedentibus faciliè deducetur.*

## PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

*Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in ellipsis; et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.*

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsis accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsis accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multùm ab ellipsis erabitur.

*Cas. 1.* Pone corpora plura minora circâ maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legem Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: et maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; (\*) nisi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste, et (²) actiones mutuae sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsis quadrent,

Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut  $TL \times L + TD \times S$ , hoc est, ut  $TD \times \frac{S + T + L}{L}$ , ob  $TL \times L = TD \times \frac{T + L}{L}$  (60); et vis acceleratrix quâ punctum D versus C trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut  $SD \times S$ , hoc est ut  $C \times S \times \frac{S + C + D}{S}$ ; sed (61)  $CS \times S = CD \times \frac{T + L}{L}$ , adeoque vis acceleratrix quâ punctum D versus C trahitur, est ut  $CD \times \frac{T + L}{L} + S$ . Quare vis acceleratrix quâ corpus T versus D trahitur, est ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versus C, ut  $TD$  ad  $CD$ , hoc est ut distantie a punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, et punctum D ad C trahuntur viribus absolutis aequalibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D et C trahuntur quo traherentur, si circâ idem virium centrum ad

distantias TD, DC revolverentur, sed in hoc casu aequalibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per Cor. 2. Prop. X.) ergò et in illo casu corpus T circâ D et punctum D circâ C, aequalibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cum plura sunt corpora revolventia.

(\*) \* *Nisi quâtenus errores inducuntur, &c.* Nam si corpus maximum a communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuo, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circâ maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (per Cor. 2. et 3. Prop. 58.)

(²) \* *Et actiones mutuae sint datis quibusvis minores respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva ab-*

et areae respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. Q. e. o.

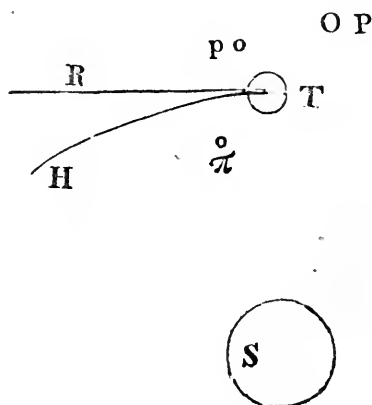
*Cas. 2. (\*)* Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolvendum, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolvendum corporum systema progredi uniformiter in directum, et interea vi corporis alterius longè maximi et ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; et augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiae respectu earum longitudinis et inclinationes ad invicem minores sint, quam datae quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur ideò hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, <sup>(b)</sup> centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (viz. <sup>(c)</sup> Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) et radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiae, perexiguæ sane et pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. e. o.

soluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eadem ratione minuitur.

(\*) • Fingamus jam corporum minorum, P, p,  $\pi$ , modo jam descripto circâ maximum T revolvendum systema progredi uniformiter in directum, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, et interea vi corporis alterius longè maximi S, et ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus secundum rectas PS, p s,  $\pi$  S, T S, atque a rectâ TR retrahi et in curvam TH cogi, &c.

(b) • Hoc est, centro suo gravitatis, in quo totum systema gravium P, p,  $\pi$ , T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) • Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim vel circulum fortiore; nianente enim velocitate corporis circâ centrum virium S projecti, et circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad



Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

*Corol. 1.* <sup>(d)</sup> In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

*Corol. 2.* Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, <sup>(e)</sup> non sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; <sup>(f)</sup> præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter et secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora et non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione et inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

*Corol. 3.* Unde si systematis hujus partes in ellipsisibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levisimè, aut urgentur æqualiter, et secundum lineas parallelas quamproximè.

## PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

*Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahunt; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et*

eandem distantiam possit parabolam describere, et magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat hyperbolam (per Cor. 7. Prop. 16. et Dem. Prop. 17.)

<sup>(d)</sup> \* In casu 2<sup>o</sup>. quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eo magis recedit a casu ubi perturbatio est nulla, nempe quando corpus S infinitè distat, ergò eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se.

<sup>(e)</sup> \* Non sint ad invicem reciprocè, &c. Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus

traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantie suæ a corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantie.

<sup>(f)</sup> \* Præsertim si proportionis hujus inæqualitas, &c. Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum S P, S p; Nam si illæ inæqualitates attractionum et distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum S P, S p differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.





(per legum Corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio  $S N$  minor esset attractione  $S M$ , tolleretur ipsa attractionis  $S M$  partem  $S N$ , et maneret pars sola  $M N$ , quâ temporum et arearum proportionalitas et orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio  $S N$  major esset attractione  $S M$ , oriretur ex differentiâ solâ  $M N$  perturbatio proportionalitatis et orbitæ. Sic per attractionem  $S N$  reducitur semper attractio tertia superior  $S M$  ad attractionem  $M N$ , attractione primâ et secundâ manentibus prorsus immutatis: et propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, et orbita  $P A B$  ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio  $M N$  vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum  $P$  et  $T$  attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus  $S$ , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio  $S N$  non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium  $S M$ , sed inter attractionum omnium  $S M$  maximam et minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione  $S K$ . Q. e. d.

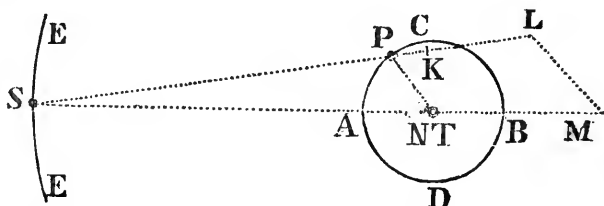
*Cas. 2.* <sup>(k)</sup> Revolvantur jam corpora minora  $P$ ,  $S$  circa maximum  $T$  in planis diversis; et vis  $L M$ , agendo secundum lineam  $P T$  in plano orbitæ  $P A B$  sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus  $P$  de plano orbitæ suæ deturbabit. <sup>(l)</sup> At vis altera  $N M$ , agendo secundum lineam quæ ipsi  $S T$  parallela est (atque ideo, quando corpus  $S$  versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ  $P A B$ ) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus  $P$  de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum  $P$  et  $T$  ad invicem situ, erit ut vis illa generans  $M N$ , ideoque minima evadet ubi  $M N$  est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio  $S N$  non est multo major, neque multo minor attractione  $S K$ . Q. e. d.

<sup>(k)</sup> 497. *Cas. 2.* Planum  $T E S E$  cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò  $P A B$  planum alterâ sui parte, v. gr.  $C A D$  suprâ planum  $T E S E$  eminere, et alterâ parte  $D B C$  infrâ planum  $T E S E$  deprimi intelligatur, linea recta  $D C$  communis planorum  $T E S E$  et  $P A B$  intersectio, linea nodorum dicitur, et illius extrema puncta  $D$  et  $C$  nodi appellantur. Nodi vel puncta quavis  $D$ ,  $C$  dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis  $S$ , dum sunt in lineâ rectâ ad  $S T$  in puncto  $T$  perpendiculari, quod in hoc casu corpus  $S$  et punctum  $C$  vel  $D$  sub angulo recto de loco  $T$  videantur. Si super lineâ  $S T$  erectum intelligatur planum plano  $T E S E$  verticale, sintque puncta  $A$  et  $B$  in illo plano verticali,  $A$  quidem inter corpora

$S$  et  $T$ ;  $B$  verò ultrâ  $T$ , punctum  $A$  dicitur esse in conjunctione, et punctum  $B$  in oppositione respectu corporum  $S$  et  $T$ ; et loca  $A$  et  $B$ , communi nomine syzygiæ vocantur. Motus in longitudinem est quo corpus revolvens  $P$  a puncto suæ orbitæ dato, v. gr. a puncto  $C$  recedit per  $C P A D B$ : motus in latitudinem est is quo corpus revolvens  $P$  ad planum immotum  $T E S E$  accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolvantium  $P$  et  $S$  motus inter se conferantur, et utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab occidente in orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab oriente in occidentem in antecedentia fieri dicitur.

<sup>(l)</sup> \* At vis altera  $N M$ , &c. Si orbitæ

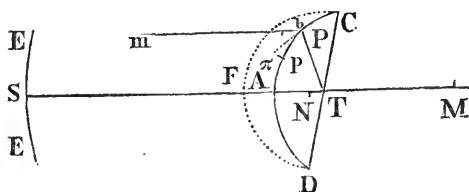
*Corol. 1.* <sup>(n)</sup> Ex his facillè colligitur, quod, si corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur et agitur, atque a cætera se mutuo.



*Corol. 2.* In systemate vero trium corporum T, P, S, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus P, radio P T, aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A et oppositionem B, quam prope quadraturas C, D. Namque vis omnis qua corpus P urgetur et corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam P T accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigatur. <sup>(o)</sup> Talis est vis N M. Hæc in transitu corporis

P A B (vid. fig. Newt.) pars A C B suprâ planum T E S E elevata, pars verò altera A D B infrâ ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum A B coincidat cum lineâ T S sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis N M ut potè quæ in corpus P agit secundum lineam ipsi T S parallelam, jacebit in plano orbitæ P A B, et motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus

et parallela N M, p locus ad quem corpus P exclusâ vi N M tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ P m ad quem corpus idem P, solâ vi N M, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsu, quarum altera agit secundum directionem P p in plano C A D altera secundum directionem P m ad planum C A D inclinatum, motu composito describet lineam P  $\pi$  quæ non est in plano C A D.



P ad planum T E S E magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrâ lineam nodorum, vis N M inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim C A D T pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi N M describeret suprâ planum T E S E seu C F D emineas, sit C D linea nodorum, P in recta æqualis

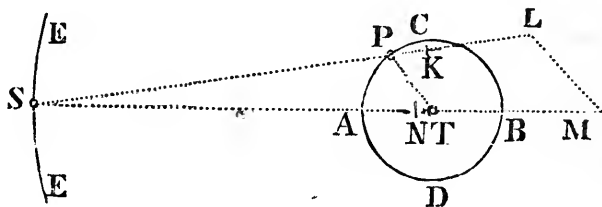
<sup>(n)</sup> \* *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur a corpore illo R, ac corpus P, et itâ de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonstratis facillè colligitur quod si, &c.

<sup>(o)</sup> 498. *Talis est vis N M.* Si supponamus orbem C A D B (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, et distantiam S D maximam respectu radii P T, erit ferè S C = S K = S T = S N, et proinde N M = T M. Porro corpore P in quadraturis C, D versante, est S C = S P = S K; quare cum sit, (per constr. Prop. 66.) S L : S K = S K<sup>2</sup> : S P<sup>2</sup>, erit in





T in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P, ad apsidem summam appellens, absit longius a corpore T in syzygiis quam in quadraturis.



*Corol. 6.* Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis L M, ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis K L, et (\*) ob magnitudinem vis K L, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta

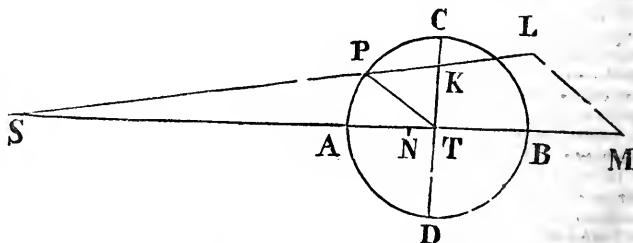
sior sit quam in quadraturis C et D ad instar ellipseos cujus sit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ita se habent, si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

(\*) 500. *Et ob magnitudinem vis K L, &c.* Si distantia mediocris S K vel S T ingens fuerit respectu radii T P

orbitæ P A B, in loco quovis corporis P, erit vis L M quam proximè ad vim N M ut sinus totus ad sinum triplum distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis S (ex hyp.) lineæ S L, S M sunt ferè parallelæ ac proinde L M = P T, N M seu T M = P L, et S P = S K; cumque sit S T ad lineam quadraturarum C D perpendicularis, erit etiam S K ad eandem normalis, et existente P T radio, erit P K sinus anguli P T C, hoc est, sinus distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ C. Porro (per Prop. 66.) S L : S K = S K<sup>2</sup> : S P<sup>2</sup>, adeoque S L · S K : S K<sup>2</sup> = S P<sup>2</sup> : S P<sup>2</sup>; hoc est, K L : S K = P K × S K + S P : S P<sup>2</sup> = P K × 2 S P : S P<sup>2</sup> = 2 P K : S P = 2 P K : S K, ob S K = S P, et S K + S P = 2 S P.

Quarè erit K L = 2 P K, et P L seu N M = 3 P K, hoc est, vis L M seu P T ad vim N M seu P L, ut sinus totus P T ad 3 P K triplum sinum distantie angularis corporis P a quadraturâ proximâ.

501. *Corol.* Vis K L in conjunctione A, est ad vim similem in oppositione B, ut A T ad



T B. et si orbita P A B circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis K L in syzygiis duplo major vi L M in quadraturis quam proximè. Nam corpore P in syzygiis versante, fit P K = A T = P T = L M, et proinde N M seu P L fit = 3 L M, et K L = 2 L M. Tandem iisdem positis, vis N M maxima est in syzygiis, quoniam ibi P K fit maxima seu evadit = A T, et N M = 3 A T.

Unde ob magnitudinem vis K L (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque censenda est pro absolute diminutâ ab actione corporis S.

(per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P directè et ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis K L; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius T P, augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquuplicatâ, (per Corol. VI. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper et minus attractum perpetuò recederet longius a centro T; et contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, <sup>(s)</sup> augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius T P per vices; et <sup>(t)</sup> tempus periodicum augebitur ac

(<sup>s</sup>) \* *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur a corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum a centro T longius recederet; et contra, si augeatur vis illa, corpus P ad T propius accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augeatur vis N M minuiturque vis centripeta corporis P, ac proinde crescit distantia P T. E contra autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque N M et augeatur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia P T. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius P T, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(<sup>t</sup>) \* *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur, &c.* Corpus P circâ T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo P A D revolvatur, et accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam S T, parva admodum sit respectu vis quâ corpus P a corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per Cor. 2. Prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P qui dicatur R directè et ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut  $\frac{R}{t^2}$ , et manente radio ut  $\frac{1}{t^2}$ ; sed vis acceleratrix in distantia datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut  $\frac{1}{t^2}$  et  $t^2$  ut  $\frac{1}{V}$ ,

ac t ut  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  manente radio T P seu R. Porro vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciproce ut quadratum distantie T P, hoc est directè ut

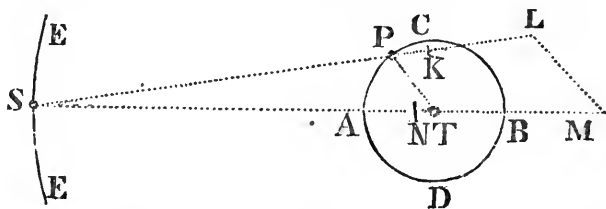
$\frac{1}{R^2}$  (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P a corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut  $\frac{1}{R^2}$  quam proximè;

quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T et mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici  $t^2$  erit ut distantie cubus  $R^3$ , ac proinde t ut  $\sqrt{R^3}$ . (per Corol. 6. Prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquuplicatâ ratione radii T P. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, et vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, et vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici  $t^2$  erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprâ inventis, nimirum ex ratione  $\frac{1}{V}$ , et ratione  $R^3$ , hoc

est  $t^2$  erit ut  $\frac{R^3}{V}$ , et proinde t ut  $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$ , aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione  $\sqrt{R^3}$ , sesquuplicatâ radii, et ratione  $\frac{1}{\sqrt{V}}$ , subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augeatur; nam decrescente V crescit pariter  $\frac{1}{V}$ , et contra crescente V in eâdem ratione decrescit  $\frac{1}{V}$ .

502. *Scholium.* Hinc ut David Gregorius in scholio ad Prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ et geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur et minuatur per

diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii, et ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.



*Corol. 7.* Ex <sup>(u)</sup> præmissis consequitur etiam, quod ellipseos a corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur et regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis M N evanuit, componitur ex vi L M et vi centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis <sup>(v)</sup> prior L M, si augetur distantia P T, augetur in eâdem fere ratione cum hâc distantia, et vis posterior, decrescit in duplicatâ illâ ratione, ideoque summa harum virium <sup>(z)</sup> decrescit in minore quam duplicatâ ratione distantiae P T, et <sup>(a)</sup> propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa,

vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis et nova ei addatur et detrahatur per vices materia, atque inde ejus vis absoluta in eâdem ratione augetur et minuatur, corpus P in minori et majori orbitâ per vices revolvitur, diminuto et aucto per vices radio T P ejusque tempus periodicum minuetur et augebitur per vices in ratione compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii directè et ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut supra. Vis enim acceleratrix composita et residua quâ corpus T auctum et diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantiae inversè, quod in casu Corol. 6. quam proximè tantum obtinet.

<sup>(u)</sup> \* *Ex præmissis.* Si corpus P circum T ellipsim circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos axis major seu apsidum linea motu angulari circâ umbilicum T per vices progreditur seu fertur in consequentia et regreditur, seu in antecedentia movetur; progreditur nempe, dum corpus P est in syzygiis A et B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C et D, sed magis tamen progreditur quam regreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia.

<sup>(v)</sup> \* *Vis prior L M, &c.* Nam ob ingentem corporis S a corporibus P et T distantiam (ex

Hyp.) S L est ferè parallela S M, et proinde L M ipsi P T parallela crescit ubique ut P T, quamproximè; in quadraturis verò L M coincidit cum P T.

<sup>(z)</sup> \* *Decrescit in minore quam duplicatâ illâ ratione,* hoc est, non tantum minuitur in distantia majore, nec tantum augetur in distantia minore, quantum minueretur vel augetur, si vis tota acceleratrix, seu virium summa esset semper ut quadratum distantiae reciproce.

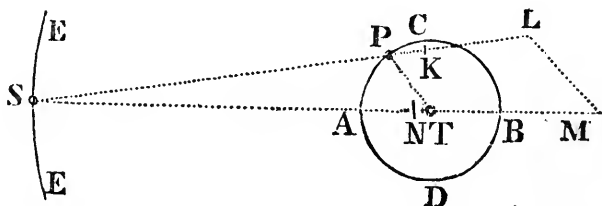
<sup>(a)</sup> \* *Et propterea per Cor. 1. Prop. 45.* Sit  $TP = A$ , et  $LM = c \times A$ ; c verò quantitas data, et vis quâ corpus P versus T exclusâ corporis S actione augetur, erit (ex Hyp.) ut  $\frac{1}{A^2}$ , et accedente vi exigua L M in quadraturis,

harum virium summa erit ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ ,

addeque hæc virium summa decrescet in ratione paulò minore quam in duplicatâ distantie P T seu A. Nam si distantia variabilis A evadat b  $\times A$ , sitque b numerus unitate major, erit vis in simplici distantia A ad vim in distantia majore b  $\times A$ , ut  $\frac{1}{A^2} + c \times A$ , ad  $\frac{1}{b^2 A^2} + c b A$ , hoc est, ut  $b b + c b b A^3$  ad  $1 + c b^3 A^3$  sive ut  $b b \times 1 + c A^3$  ad  $1 \times 1 + c b^3 A^3$



det motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis  $KL$  in syzygiis sit quasi duplo major quam vis  $LM$  in quadraturis, excessus erit penes vim  $KL$ , transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus et præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum  $T, P$  corporibus pluribus,  $S, S, S$ , &c. in orbe  $ESE$  consistentibus, undique cingi. <sup>(e)</sup> Namque horum actionibus actio ipsius  $T$  minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiae.



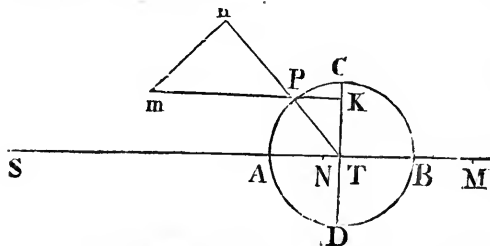
*Corol. 8.* <sup>(f)</sup> Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$ , in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut et a simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maxime recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam  $KL$  seu  $NM - LM$ , progre-

ris  $P$  revolutionibus, ceteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis  $P$ ,  $141^\circ$ , et progredientur per grad.  $219$ .

quantitas maxima evadet ubi erit  $PK = 0$ , quod in quadraturis contingit.

<sup>(e)</sup> \* Namque horum actionibus, &c. Hâc enim ratione corpus  $P$  erit semper in quadraturis simul et in syzygiis corporis, seu corporum  $S$ , adeoque cum vis ablatitia  $KL$ ; in syzygiis et propè syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia  $LM$ , in quadraturis et propè quadraturas, actio corporis  $T$  minuetur undique, decrescetque proinde in ratione plusquam duplicatâ distantiae  $TP$ .

<sup>(f)</sup> \* Cum autem (per Corol. 7.) pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto

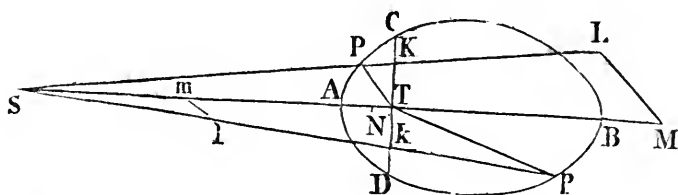


504. Iisdem positis, si orbita  $CPD$ , circulo finitima sit, erit vis addititia  $PT - Pn$ , maxima in quadraturis. Nam cum sit semper  $PT$ :  $PK = 3 PK$ :  $Pn$ , erit  $Pn = \frac{3 PK^2}{PT}$ , ac proinde  $PT - Pn = PT - \frac{3 PK^2}{PT}$ , quæ

in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae  $TP$  quæ augetur in recessu a centro  $T$ , sive in transitu corporis  $P$  ab apside imâ ad apsidem summam, ut et a simili incremento in accessu ad centrum, sive in reditu ab apside summâ ad apsidem imam, manifestum est progressum vel regressum apsidum maximum esse ubi ratio

dientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim additionem L M. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

*Corol. 9.* Si corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato distantie suæ a centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; et mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantie diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius



vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porro dum linea apsidum seu major axis ellipseos B C A D, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, et erit T B distantia maxima, A T minima (ex naturâ ellipseos.) Undè corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia K L (seu differentia virium acceleratricum corporum T et P versus S) omnium minima, et corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa K L omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit ferè K L ad k l ut A T ad T B (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem  $\frac{b}{A T^2} - c \times$

A T, ad  $\frac{b}{T B^2} - c \times T B$ , (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam K L) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem  $T B^2 \times b - c \times A T^3$ , ad  $A T^2 \times b - c T B^3$ , quæ ratio eò magis recedit a ratione  $T B^2$  ad  $A T^2$ , seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis  $b - c \times A T^3$ , ad quantitatem  $b - c \times T B^3$ , recedit a ratione æqualitatis, seu quo minor est A T respectu T B, quare dum linea apsidum est in syzygiis A, B, ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsidem celerrimè pro-

grediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis L M = C T, vel D T; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum C T, D T, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsidem viribus C T, D T tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, et celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, et apsidem in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsidem velocissimè regrediuntur, corpore P in quadraturis versante, et tardissimè progrediuntur corpore P in syzygiis existente, et ex hac utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsidem in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia K L quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ L M quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressus supra regressum, apsidem progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsidem ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P et S in suis orbitis spectantur in eandem plagam; In hac enim hypothesi, apsidem diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia et corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsidem diutius progrediuntur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.





decrementi totius in progressu inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiae apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, et contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires L M in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, et vires K L in syzygiis subductæ a viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi et incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: et propterea in transitu apsidum, a quadraturis in syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit.

*Corol. 10.* Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis E S T immobile manere; et ex errorum expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus N M, M L, quæ sunt causa illa tota, vis M L agendo semper secundum planum orbis P A B, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis N M, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, (1) non perturbat hos motus; (2) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque P de plano

ad vim in apside summâ ut  $T B^2 \times b - c A T^3$ , ad  $A T^2 \times b - c T B^3$ , adeoque in majori ratione quam T B<sup>2</sup>, ad A T<sup>2</sup>, et quoniam ratio T B, ad A T, in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi et incrementi totius in transitu inter apsides, maxima est in syzygiis apsidum, et propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, et in transitu apsidum a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit. Maxima ergo est orbis excentricitas, ubi apsides sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

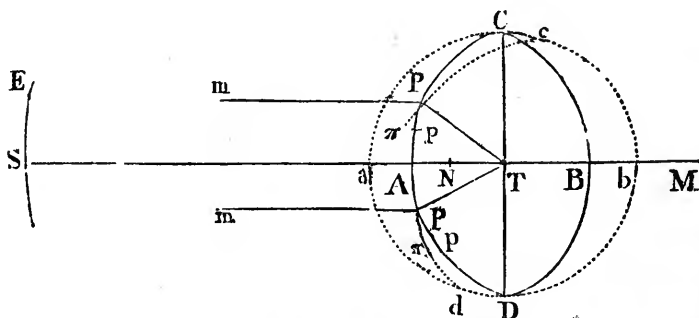
505. Ex his etiam sequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circa syzygias corporis P augeri, et circa ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (per Cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majori quam duplicatâ ratione distantiae auctæ, et crescit in majori ratione quam duplicatâ distantiae diminutæ, et in quadraturis contrâ. Quare corpus P, in syzygiis et propè syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis

verò et propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio Cor. 9.) Et quoniam vis addititia L M in quadraturis corporis P maxima est, et vis ablatitia K L in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit et ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima sit in quadraturis corporis P, et maxima in illius syzygiis, atque adeò quod a quadraturis ad syzygias perpetuò augeatur, et a syzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

(1) \* Non perturbat hos motus. Patet per Cas. 2. Prop. 66.

(2) 506. Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat; Ubi nodi sunt in quadraturis C et D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut potè æqualis planorum C A D, E S T inclinationi et proinde, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, et evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque adeò in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, et contrâ, decrescit in eorum transitu a quadraturis ad syzygias.

orbis sui perpetuò trahendo, <sup>(n)</sup> minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut <sup>(o)</sup> corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, <sup>(p)</sup> redeatque ad priorem magnitudi-



<sup>(n)</sup> 507. *Minuit inclinationem plani, &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D constituentur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum E S T perpetuò minuitur in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis a syzygiis ad quadraturas, et in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D suprâ planum immotum E S T elevata altera, verò pars C B D infrâ illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m parallela lineæ T S, exhibens directionem vis N M, et corpus P feratur primum a nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, et quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, et vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describit lineolam P π quæ non est in plano C P T, sed ab eo deflectit versus P m, adeoque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurrit in C sed ultra C versus oppositionem B. Centro T et intervallo T P describatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, et in plano π P T arcus P c circulo C a D b occurrens in c. Et quoniam vis N M minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T et c P T minimus est seu infinitesimus, et arcus P c ab arcu P C non nisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus P C a quadrante C A differat finitâ quantitate P A, summa arcuum P C, P c semicirculo minor est, et hinc in triangulo spherico C P c, angulus externus P C a (per Prop. 13. sphaericorum Menelai, vel per Theor. 33. Sphaericorum Clariss. Wolfii,) major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani c P T ad planum immotum E S T minor est

inclinatioe plani C P T ad idem planum E S T. In transitu igitur corporis P a quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, et quoniam nodus C transfertur in c, fitque proinde obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui et nodos regredi in transitu corporis a quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus a conjunctione A ad quadraturam proximam D, et in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum P p et vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò describit lineolam P π, quæ ab arcu P p versus P m declinat. Quare si centro T et intervallo T P describantur ut suprâ tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, et angulum P d a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, a conjunctione ad quadraturam proximam, et eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. e. d.

<sup>(o)</sup> \* *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima est in syzygiis (501).

<sup>(p)</sup> \* *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantis a nodis C et D, in utroque quadrante C A et A D, vel D B et B C; quare cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, et per vim exiguam N M minuat inclinationem plani in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias, et contrâ, augetur per æqualem vim N M in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias; liquet quòd inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P a



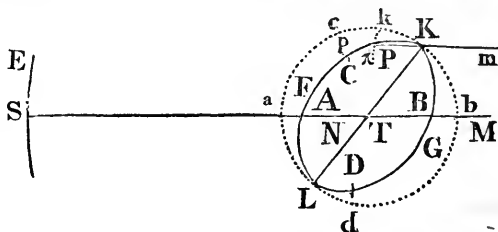
B et C. (t) Inclination igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in

positionem B vel b, et nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, et conjunctionem A seu a, feraturque corpus a nodo K per C ad alterum

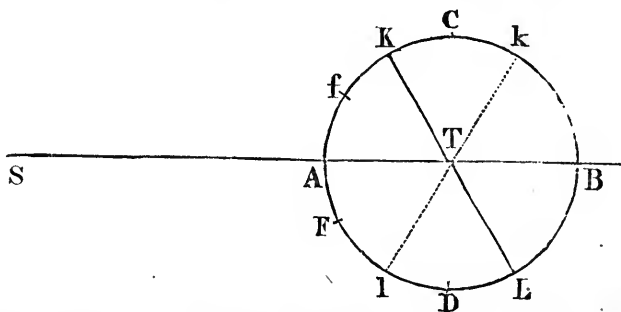
nodum L. 1<sup>o</sup>. In transitu corporis a nodo ad quadraturam proximam inclinationi plani perpetuo augetur et nodi progrediuntur. 2<sup>o</sup>. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum a nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur et nodi regrediuntur. 3<sup>o</sup>. In transitu a gradu illo 90<sup>o</sup>. ad nodum proximum inclinationi augetur et nodi regrediuntur. 2<sup>um</sup>. et 3<sup>um</sup>. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1<sup>um</sup>. verò ita ostenditur. Dum

$T p P, T \pi P, E S T$  patet propositum, ut in  
notâ 507.

510. *Corol.* Ex tribus superioribus demonstra-



tionibus (507, 508, 509) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram et nodum quadraturæ proximam versatur; eos vero regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Unde sequitur in singulis corporis P a nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeoque absolute regredi nisi fuerint in syzygiis.



(<sup>1</sup>) \* *Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis*, &c. Quoniam in singulis corporis P a nodum retroviationibus, linea nodorum regreditur (510) et in transitu nodorum a syzygiis A et B ad quadraturas C et D, inclinatio orbite perpetuò minuitur (508) deinde verò in transitu nodorum a quadraturis C et D, ad syzygias B, et A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis et corpus P in syzygiis (in quibus vis N M, cæteris paribus, maxima est) et maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K et L inter C et A, D et B primum, deinde regrediendo transeant in locum k et l, inter C et B, D et A, sicut arcus C K et C k, aequales. In primo casu inclinatio

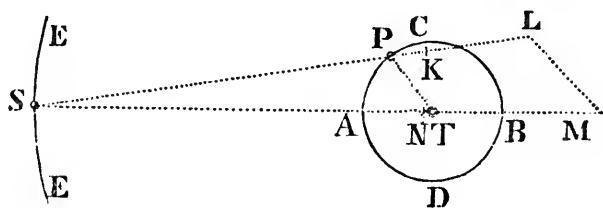
minuitur in transitu corporis P, per quadrantem K F, (508) et in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem f l, (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum F D (508), et in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum Cf = F D (509). Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum D L, (508) et in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem k C, (509). Quare, cæteris paribus, in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus antea decreverat in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.







tionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ  $N M$ ,  $M L$ , et earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis  $S$  e corpore  $T$  spectati, et vice versâ. Namque hæ rationes eadem sunt, atque ratio superior composita.



*Corol. 15.* <sup>(b)</sup> Et quoniam si, manentibus orbium  $E S E$  et  $P A B$  formâ, proportionibus et inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, et si corporum  $S$  et  $T$  vel maneant, vel mutantur vires in datâ quâvis ratione; <sup>(c)</sup> hæ vires (hoc est, vis corporis  $T$ , quâ corpus  $P$  de recto tramite in orbitam  $P A B$  deflectere, et vis corporis  $S$ , quâ corpus idem  $P$  de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, et eadem proportionem: necesse est ut similes et proportionales sint effectus omnes, et proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, et errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

*Corol. 16.* Unde, si dentur orbium formæ et inclinatio ad invicem, et mutantur utcumque corporum magnitudines, vires et distantiae; ex datis erroribus et errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores et

<sup>(b)</sup> \* *Et quoniam si manentibus, &c.* Hoc est, si corporum  $S$  et  $T$  vel maneant vel mutantur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, et orbium  $E S E$  et  $P A B$ , magnitudo ita mutetur, ut orbis  $E S E$  sibi similis semper maneant, sicut et orbis  $P A B$  sibi, et horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

<sup>(c)</sup> \* *Hæ vires, &c.* Vis acceleratrix quâ corpus  $P$  in loco  $P$  versùs  $T$  trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versùs  $S$  urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis  $T$  ad vim absolutam corporis  $S$ , et ratione inversâ duplicatâ distantie  $P T$  ad distantiam  $P S$ . Quare si vires absolutæ et distantie in datis rationibus mutantur, manebit eadem virium acceleratricum ratio, et ob figurarum similitudinem, in similibus corporum  $P$ ,  $T$ ,  $S$  posi-

tionibus, antè et post distantias viresque mutatas omnium linearum  $S P$ ,  $S K$ ,  $M L$ ,  $S M$ ,  $N M$ , &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo et eadem proportionem. Necesse igitur est ut antè et post distantias, et vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes et proportionalia effectuum tempora (196); hoc est, errores omnes lineares similes a viribus  $M L$ ,  $N M$  producti, seu deviationes corporis  $P$  in longitudinem et latitudinem a locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus  $M L$ ,  $N M$  non ageretur, sunt ut orbium diametri, et anguli sub quibus e centro  $T$  deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (Lem. V. et not. 112), et errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum  $T$ , et  $P$  systema



errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hâc methodo. (d) Vires N M, M L, cæteris stantibus, sunt ut radius T P, et harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, et quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P; et hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus augis et nodorum, quàm omnes in longitudinem et latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii XIV. et in quolibet corporum T, P, S systemate, ubi P circum T sibi propinquum, et T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè. (e) Et inde motus medius augis

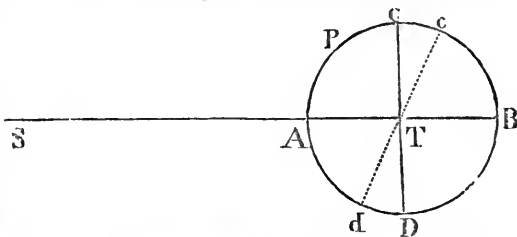
circa corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis E S E in demonstratione ponatur orbis quem corpus T circum S describit.

(d) \* Vires N M, M L, &c. Quoniam vires N M, M L sunt (Cor. 14.) ut vis S K et ratio P T ad S T conjunctim, manentibus vi S K et S T erunt vires illæ ut radius T P et proinde aucto vel diminuto radio illo T P, manent in datâ inter se ratione, et quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis P A B (sed sibi semper similis et æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ et quadratum temporis periodici corporis P circum T conjunctim, hoc est, ut radius T P, et quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porro si in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, sit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis P circum T, angulus D T d, sub quo error ille D d è centro T videtur, hoc est, error

angularis periodicus erit  $= \frac{D d}{T D}$  (154). Erro-

res igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè et radius T D vel T P inversè, adeoque ut quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis S et distantia S T et variantibus radio T P ac tempore periodico corporis P; verum stantibus radio T P et tempore periodico corporis P et variantibus vi absolutâ corporis S atque distantia S T, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (Corol. 14.) reciprocè ut quadratum temporis periodici corporis T circum S, quare variantibus tum ra-

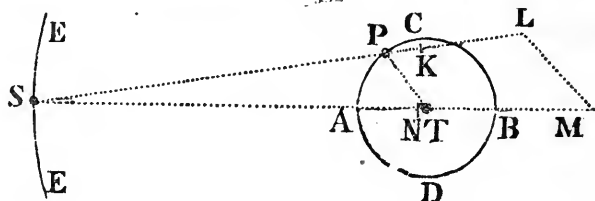
dio T P, et tempore periodico corporis P, tum radio S T, atque vi absolutâ corporis S, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius P circum T, in ratione ex binis superioribus ratio-



nibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè et quadratum temporis periodici corporis T, inversè.

(e) \* Et inde motus medius augis, &c. Si corpus quodvis celerius et tardius vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obtinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum et nodorum motus tardior et celerior est per vices, nunque in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurius revolutionum corporis P tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis et nodorum sit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis P pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angu-

erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; et motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem et inclinationem orbis P A B <sup>(f)</sup> non mutantur n.otus augis et nodorum sensibiliter, nisi ubi cædem sunt nimis magnæ.



*Corol. 17.* Cum autem linea L M nunc major sit nunc minor quam radius P T, exponatur vis mediocris L M per radius illum P T; et erit hæc ad vim mediocrem S K vel S N (quam exponere licet per S T) ut longitudo P T ad longitudinem S T. Est autem vis mediocris S N vel S T, quâ corpus T retinetur in orbe suo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, <sup>(g)</sup> in ratione compositâ ex ratione radii S T, ad radius P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris L M ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam P T revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unâ cum distantia P T, datur vis mediocris L M; <sup>(h)</sup> et eâ datâ, datur etiam vis M N quam proximè per analogiam linearum P T, M N.

laris augis et nodorum ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè; et indè motus medius augis et nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè, datam habent ad se mutuò rationem.

<sup>(f)</sup> \* *Non mutantur, &c.* Nam vires M L, N M motuum augis et nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas et inclinatio orbis P A B, nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ M L, N M Prop. 66. determinantur.

<sup>(g)</sup> \* *In ratione compositâ ex ratione radii S T, &c.* Nam (per Cor. 2. Prop. 4.) vis acceleratrix mediocris S T quâ corpus T circum S ad distantiam S T circumul vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim simi-

lem quâ corpus P in orbitâ suâ circulari vel circulo finitima retinetur in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radius P T directè, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis P circum T, inversè. Quare vis prior est ad posteriorem in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radius P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P ad tempus periodicum corporis T; cumque sit etiam, ex Dem., vis mediocris L M ad vim mediocrem S T, ut P T ad S T, erit per compositionem rationum et ex æquo, vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis P circum T ad quadratum temporis periodici corporis T circum S.

<sup>(h)</sup> \* *Et eâ datâ, datur etiam vis N M (500).*

*Corol. 18.* Iisdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; et singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus T, et celerius movebuntur in conjunctione et oppositione ipsarum et corporis S, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, et velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, <sup>(1)</sup> et axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

*Corol. 19.* Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari et extendi usque ad hunc annulum, et alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvî. Hic liquor per vices acceleratus et retardatus (ut in superiore corollario) <sup>(k)</sup> in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, et sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S, nullum acquireret motum fluxus et refluxus. <sup>(l)</sup> Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, et interea revolventis circa centrum suum (per legem Corol. 5.) ut et globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legem Corol. 6.) Accedat autem corpus S, et ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. <sup>(m)</sup> Vis autem L M trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; et vis K L trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus et faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quâtenus motus fluendi et refluendi ab alveo aquæ dirigatur, et per frictionem aliquâtenus retardetur.

*Corol. 20.* Si annulus jam rigeat, et minuatur globus, cessabit motus

<sup>(1)</sup> \* Et axis ejus seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo singulis revolutionibus oscillabitur, hoc est, ad planum E S T magis et minus per vices inclinabitur (Cor. 10.) completaque, &c. totum verò Corollarium patet ex Corol. 3. 5. 10. 11. 13.

<sup>(k)</sup> \* In syzygiis velocior erit, &c. Per Cor. 18. et 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circa axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutio-

nem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis et minimam in quadraturis.

<sup>(l)</sup> \* Par est ratio, &c. Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquireret motum fluxûs et refluxûs, accedat autem, &c.

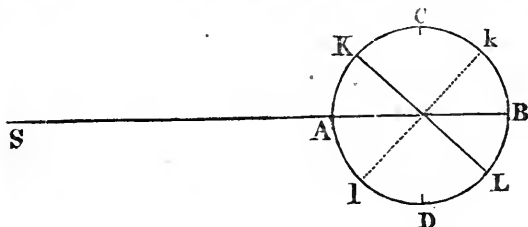
<sup>(m)</sup> \* 514. Vis autem L M, &c. Patet per Corol. 5. Verum ut totum hoc Corollarium 19<sup>um</sup>.



proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulò quam juxta polos, vel constat ex materiâ paulo densiore. (r) Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, auctâ utcumque globi hujus vi centripetâ, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum; ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus et præcedentis corollarii (s) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur et permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis L M trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, et vis K L seu N M — L M trahit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum et incipiunt trahere

per arcum C k motum inclinationis decrescantis iisdem gradibus diminuit, quibus per arcum K C productus et acceleratus est. Quare ille decrescantis inclinationis motus penitus non de-

raturas incidere, minimam in syzygiis. Verùm si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, seu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sustinentur et in orbe suo permanent ac proinde non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolvantis a centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in



struitur, nisi nodus K pervenerit in k tumque vis N M planum reclinat, hoc est, nodo existente in k incipit motus reclinacionis sive motus inclinationis crescentis et perseverat usque ad octantem proximum L atque ibi cessat. Liqueat igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l post quadraturas C, D maximum verò dum nodi versantur in octantibus K et L post syzygias A, B.

(r) \* *Supplet enim vicem annuli, &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus excessus per annulum C c A D b, (vid. fig. not. 514.) exhibeatur et reliqua globi materiæ in centro T coacta intelligatur

(s) \* *Vix inde mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressiones virium L M, N M suscipiat, loca tamen maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetæ et centrifugæ æquilibrio, in orbe suo sustineri et permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolvantis; atque inde ex Cor. 5. ostensum est in Cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quad-

syzygiis, minima in quadraturis (per Cor. 3.) Præterea vis L M additiâ trahit aquam deorsum, seu ad centrum T, maximè in quadraturis (504) et vis ablatitiâ K L trahit eandem sursum, maximè in syzygiis (501) et ideò si globus cum aquâ circumposita non revolveretur circum centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C et D, maximæ in syzygiis A et B essent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis additiâ post quadraturas agens, aquam deorsum semper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; et similiter hæc vis ablatitiâ post syzygias sursum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maximæ verò post syzygias. Insuper rotatio globi circa proprium axem maximas aquarum altitudines in syzygiis A et B versus quadraturas D et C transfert, intercadum vires L M, N M simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C et D continuò fluit versus A et B, dum elevato ab A versus D et a B versus C transfertur, et ideò inter A et D ut et inter B et C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ita ut altitudines

aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, et minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

*Corol. 21.* Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, et per ablationem tollitur; <sup>(t)</sup> si materia plusquam redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

*Corol. 22.* Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, et motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem et perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, et motum inde concipere <sup>(u)</sup> partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, <sup>(x)</sup> quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. <sup>(y)</sup> Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte, quâ prius, impulsu quocunque novo; et cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, mani-

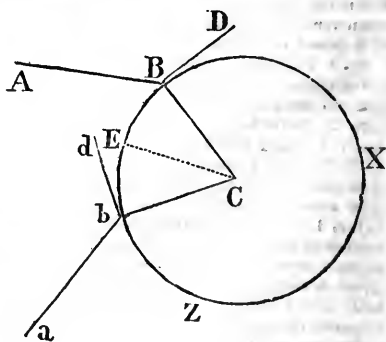
maximæ inter hæc puncta incidant ferè circà octantes.

<sup>(t)</sup> \* Si materia plusquam redundans tollatur, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, orietur motus nodorum in consequentia.

<sup>(u)</sup> \* Partim circularem, partim in directum. Vis A B quâ globus B X Z obliquè impellitur, secundum directionem A B, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radius B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera secundum tangentem B D radio B C normalem agit, et motum rotationis circà axem plano A B D X C perpendicularem inducit.

<sup>(x)</sup> \* Quam in alium quemvis; antequam motus imprimatur, perspicuum est quod is axem suum rotationis axisque inclinationem ad planum quodvis positione datum vi propriâ nunquam mutabit.

<sup>(y)</sup> \* Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte B quâ prius, &c.



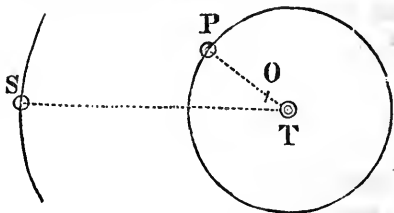








rium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. et LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, et augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum et maximum T lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (\*) minuendo motum corporis T, moveri incipit, et magis deinceps magisque agitur.



*Corol.* Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, et arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè et quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, et orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum [(<sup>e</sup>) nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ in centro gravitatis corporis maximi et intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; et sic deinceps] quam si corpus intimum quiescat et statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

## PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

*I. a systemate corporum plurium, A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut*

legantur Propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum P et T a centro in quod tertium S trahitur. Detur præterea motus non uniformis in directum communi trium centro, (quod continget, si corpus intimum et maximum T, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) et augebitur perturbatio, proinde, &c.

(<sup>f</sup>) \* Minuendo motum corporis T, &c. Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, interea dum corpora S et P moventur, nunc accedat ad corpus T nunc ab illo recedat, pro mutata corporum illorum distantia, et hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus et magis

ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(<sup>g</sup>) \* Nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ, quam v. gr. corpus parvum P hic describit in centro gravitatis corporis maximi et intimi T quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum P et T (per Cas. 1. Prop. 65.); umbilicus orbitæ secundæ quam v. gr. corpus S describit in communi centro gravitatis O, corporum duorum intimorum P et T; umbilicus tertiæ orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret in communi centro gravitatis trium interiorum P, T, S, &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in Prop. 64. 65.)

*quadrata distantiarum a trahente ; et corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproçè ut quadrata distantiarum a trahente : erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi ; et similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantiiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, <sup>(h)</sup> ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantiiis ; <sup>(i)</sup> et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B ; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam et octavam) sunt ut vires acceleratrices et corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) <sup>(k)</sup> sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproçè ut quadrata distantiarum a trahente ; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

*Corol. 2.* Eodem argumento, si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciproçè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quancunque communem ex distantiiis ab unoquoque trahente definiuntur ; constat quod corporum illorum vires <sup>(l)</sup> absolutæ sunt ut corpora.

*Corol. 3.* In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione

<sup>(h)</sup> \* *Ut attractio acceleratrix corporum omnium, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A, &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla, &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantia datâ dupla vel tripla erit.*

<sup>(i)</sup> \* *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ob distantiam inter B et A, et A et B eandem.*

<sup>(k)</sup> \* *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V et attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v ; vis motrix in B, erit  $B \times V$  ; in A erit  $A \times v$  ; et (per leg. 3<sup>am</sup>.)  $B \times V = A \times v$ . Undè  $V : v = A : B$ . Ergò absoluta, &c.

<sup>(l)</sup> \* *Vires absolute sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus Corollarii hypothesi ac in demonstratione et hypothesi Propositionis.

duplicitâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, <sup>(m)</sup> quam fieri potest accuratissimis revolvantur; et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; et <sup>(n)</sup> contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

*Scholium.*

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, et corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ et quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, et colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediivæ cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium et qualitates physicas, sed quantitates et proportionales mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates et rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positæ consequuntur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis et rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; et quales motus inde consequantur.

<sup>(m)</sup> \* *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus Prop. 65. expositum est.

<sup>(n)</sup> \* *Et contra.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, et minora corpora circa maximum in ellipsis umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis re-

volvantur, et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quamproximè; ut liquet ex Corol. 2<sup>o</sup>. Prop. 58. collato cum Prop. 64. 65.

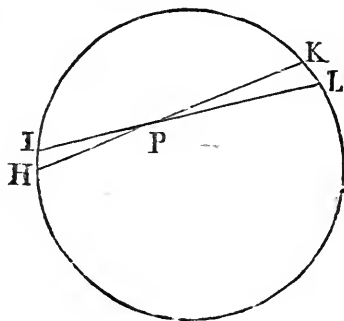
## SECTIO XII.

*De corporum sphaericorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

*Si ad sphaericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*

Sit  $H I K L$  superficies illa sphaerica, et  $P$  corpusculum intus constitutum. Per  $P$  agantur ad hanc superficiem lineæ duæ  $H K$ ,  $I L$ , arcus quam minimos  $H I$ ,  $K L$  intercipientes; et, ob triangula  $H P I$ ,  $L P K$  (per Corol. 3. Lem. VII.) <sup>(\*)</sup> similia, arcus illi erunt distantiiis  $H P$ ,  $L P$  proportionales; et superficiei sphaericæ particulæ quævis ad  $H I$  et  $K L$ , rectis per punctum  $P$  transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus  $P$  exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, et quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphaericam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus  $P$  nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. e. d.



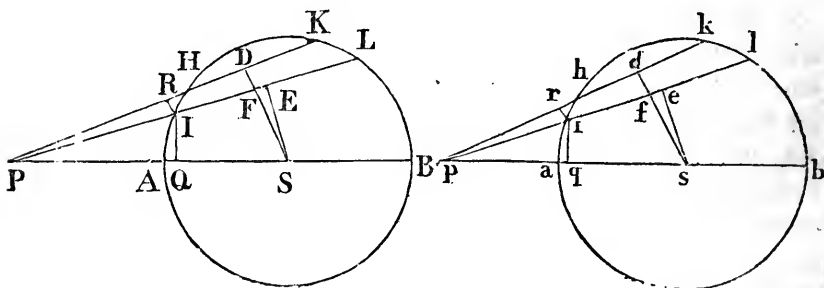
(\*) • *Similia*, &c. Anguli enim  $H P I$ ,  $L P K$  ad verticem oppositi, et anguli  $H I L$ ,  $L K H$  eidem arcui insistentes æquantur (per Prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescentes  $I H$ ,  $K L$ , pro ipsorum chordis usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus  $H I$ ,  $K L$  distantiiis  $H P$ ,  $L P$  proportionales sunt, et hinc si ad superficiem sphaericam per punctum

$P$  ductæ intelligantur innumera rectæ ad arcus quamminimos ut  $H I$ ,  $K L$  terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphaericâ similes erunt, et proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum  $H I$ ,  $H L$  seu distantiarum  $H P$ ,  $L P$ . Ergo vires, &c.

## PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

*Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphaericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaerae; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.*

Sint  $A H K B$ ,  $a h k b$  aequales duae superficies sphaericae, centrīs  $S, s$ , diametris  $A B$ ,  $a b$  descriptae, et  $P, p$  corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineae  $P H K, P I L, p h k, p i l$ , auferentes a circulis maximis  $A H B, a h b$ , aequales arcus  $H K, h k$  et  $I L, i l$ : Et ad eas demittantur perpendiculara  $S D, s d$ ;  $S E, s e$ ;  $I R, i r$ ; quorum  $S D, s d$  secant  $P L, p l$  in  $F$  et  $f$ : Demittantur etiam



ad diametros perpendiculara  $I Q, i q$ . Evanescant anguli  $D P E, d p e$ : et (<sup>p</sup>) ob aequales  $D S$  et  $d s$ ,  $E S$  et  $e s$ , lineae  $P E, P F$  et  $p e, p f$  et lineola  $D F, d f$  pro aequalibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis  $D P E, d p e$  simul evanescentibus, (<sup>q</sup>) est aequalitatis. His itaque constitutis, (<sup>r</sup>) erit  $P I$  ad  $P F$  ut  $R I$  ad  $D F$ , et  $p f$  ad  $p i$  ut  $d f$ , vel  $D F$  ad  $r i$ ; et ex aequo  $P I \times p f$  ad  $P F \times p i$  ut  $R I$  ad  $r i$ , hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) (<sup>s</sup>) ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . (<sup>t</sup>) Rursus

(<sup>p</sup>) \* Et ob aequales  $D S$  et  $d s$ ,  $E S$  et  $e s$ , &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.)

(<sup>q</sup>) \* Est aequalitatis. Nam evanescentibus  $D P E, d p e$  angulis, puncta  $F, f$  coincidunt cum punctis  $E, e$ , et iis punctis coincidentibus, aequales sunt lineae  $P E, P F$  et  $p e, p f$ , et lineolae  $D F, d f$  fiunt differentiae linearum  $D S$  et  $E S, d s$  et  $e s$ , ac proinde (ob aequales  $D S$  et  $d s, E S$  et  $e s$ ) aequantur.

(<sup>r</sup>) \* Erit  $P I$  ad  $P F$ , &c. Ob parallelas  $R I, D F$  et  $r i, d f$ .

(<sup>s</sup>) Ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ . Nam triangula evanescentia  $R H I, r h i$  similia sunt ob angulos ad  $R$  et  $r$  rectos (ex Hyp.) et angulos ad  $H$  et  $h$  aequales, quos nempe metiuntur dimidii arcus aequales  $H K, h k$  (per Prop. 32. Lib. 3. Elem.) arcus enim  $I H, i h$  pro tangentibus in  $H$  et  $h$  usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quare  $R I$  est ad  $r i$ , ut arcus  $I H$  ad arcum  $i h$ .

(<sup>t</sup>) \* Rursus, &c. Ob triangula  $P Q I, P E S$  et  $p q i, p e s$  similia, est  $P I : P S = I Q : S E$ .

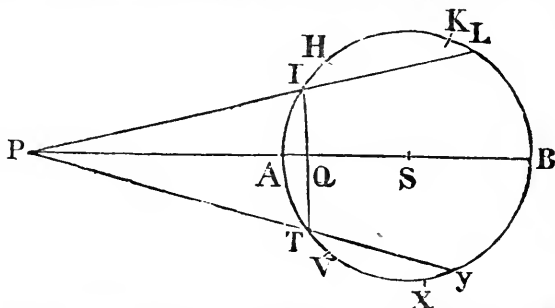
P I ad P S ut I Q ad S E, et p s ad p i ut s e vel S E ad i q; et ex æquo P I  $\times$  p s ad P S  $\times$  p i ut I Q ad i q. Et conjunctis rationibus P I quad.  $\times$  p f  $\times$  p s ad p i quad.  $\times$  P F  $\times$  P S, ut I H  $\times$  I Q ad i h  $\times$  i q; hoc <sup>(u)</sup> est, ut superficies circularis, quam arcus I H convolutione semicirculi A K B circa diametrum A B describet, ad superficiem circula-rem, quam arcus i h convolutione semicirculi a k b circa diametrum a b describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tenden-tes attrahunt corpuscula P et p, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, et quadrata distantiarum superficierum a corporibus inversè, hoc est, ut p f  $\times$  p s ad P F  $\times$  P S. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legem Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas P S, p s ad centra tendunt, ut P I ad P Q, et p i ad p q; id est (ob similia triangula P I Q et P S F, p i q et p s f) ut P S ad P F, et p s ad p f. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad

attractionem corpusculi p versus s, ut  $\frac{P F \times p f \times p s}{P S}$  ad  $\frac{p f \times P F \times P S}{p s}$ ,

hoc <sup>(x)</sup> est, ut p s quad. ad P S quad. Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum K L, k l descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut p s quad. ad P S quad. inque eâdem ratione erunt vires superfi-cierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capien-do semper s d æqualem S D et s e æqualem S E, distinguï potest. Et,

<sup>(u)</sup> 515. \* Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus I H convolutione semicirculi A K B circa diametrum A B describet. Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheriâ circuli cujus radius I Q in arcum avanescentem I H, et similiter superficies circularis quam arcus i h, convolutione semicirculi a k b circa diametrum a b, describet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius i q, in arcum evanescentem i h, (152). Cum igitur peripheriæ circulo-rum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut I H  $\times$  I Q, ad i h  $\times$  i q.

516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus A T = A I, et arcus T V = I H, vires obliquæ et æquales I Q, T Q sibi



<sup>(x)</sup> \* Hoc est, &c. Deleto in utrâque quantitate facto P F  $\times$  p f, erunt attractiones ut  $\frac{p s}{P S}$  ad  $\frac{P S}{p s}$  seu reducendo ad eundem denominatorem, ut  $\frac{p s^2}{P S \times p s}$  ad  $\frac{P S^2}{p s \times P S}$ , hoc est, ut p s<sup>2</sup> ad P S<sup>2</sup>.

mutuò opponuntur, nullumque motum in corpusculo P producent. Undè patet vires integras in corpusculum P ab utroque hemispherio A H B, A T B seu a totâ superficîe sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.

per compositionem, vires totarum superficierum sphaëricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. e. d.

## PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad sphaeræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescetes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphaeræ densitas, tum ratio diametri sphaeræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphaeræ.*

Nam concipe corpuscula duo seorsim a (°) sphaëris duabus attrahi, unum ab unâ et alterum ab alterâ, et distantias eorum a sphaërarum centris proportionales esse diametris sphaërarum respectivè, sphaëras autem resolveri in particulas similes et similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphaeræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphaeræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè et ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulæ sunt ut sphaeræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, et distantie sunt ut diametri; et ratio prior directè unâ cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si corpuscula in circulis, circa sphaëras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantie a centris sphaërarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

*Corol. 2.* Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia, distantie erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

*Corol. 3.* Si ad solidorum duorum quorumvis, similium et æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescetes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; vires, quibus corpuscula, (\*) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

(°) \* *A sphaëris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis itâ nempe ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, et vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

(\*) \* *Ad solida illa duo similiter sita*, itâ ut distantie corpusculorum a similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

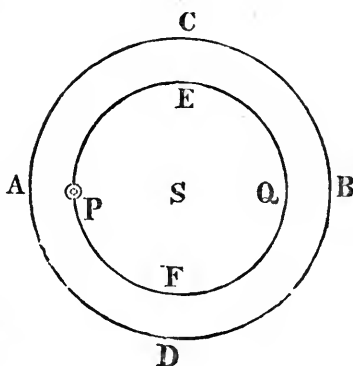
517. *Scholium.* Hinc si hujusmodi sphaera per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibusvis ad centrum usque cadit, (per Cor. 2. Prop. 38.) et corpusculorum in hujusmodi sphaerâ per spatia libera minima revolvantium tempora periodica erunt æqualia (per Cor. 3. Prop. 4.) atque ad hujus generis sphaeram pertinent quæ in Prop. 51. 52. hujusque Corollariis demonstrata sunt.



## PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrecentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantiae suæ ab ipsius centro.*

In sphaerâ A C B D, centro S descriptâ, locetur corpusculum P; et centro eodem S, intervallo S P, concipe sphaeram interiorem P E Q F describi. Manifestum est, (per Prop. LXX.) quod sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia AEBF componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P. Restat sola attractio sphaeræ interioris P E Q F. Et (per Prop. LXXII.) hæc est ut distantia P S. Q. e. d.

*Scholium.*

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur et crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies et solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

## PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

*Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiae suæ ab ipsius centro.*

Nam distinguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras concentricas, et attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantiae corpusculi a centro (per Prop.

LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphaeram totam, in eâdem ratione. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc in æqualibus distantiiis a centris homogenearum sphaerarum attractiones sunt ut sphaeræ. Nam (per Prop. LXXII.) si distantiae sunt proportionales diametris sphaerarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; et, distantiiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphaerarum.

*Corol. 2.* In distantiiis quibusvis attractiones sunt ut sphaeræ applicatae <sup>(a)</sup> ad quadrata distantiarum.

*Corol. 3.* Si corpusculum, extra sphaeram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiae suæ ab ipsius centro, constet autem sphaera ex particulis attractivis; <sup>(b)</sup> decrescet vis particulæ cuiusque in duplicatâ ratione distantiae a particula.

### PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

*Si ad sphaeræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; dico quod sphaera quævis alia similis ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiae centrorum.*

Nam particulæ cuiusvis attractio est reciprocè ut quadratum distantiae suæ a centro sphaeræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) et propterea eadem est, ac si vis tota attrahens maneret de corpusculo unico sito in centro hujus sphaeræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphaeræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiae suæ a centro sphaeræ; ideoque huic æqualis attractio sphaeræ est in eâdem ratione. <sup>(c)</sup> Q. e. d.

<sup>(a)</sup> \* *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantiiis, attractiones sunt ut sphaeræ (per Cor. 1.) et æqualibus sphaeris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum a centris reciprocè (per Prop. 74.) Quare variantibus sphaeris et distantiiis simul, attractiones sunt ut sphaeræ ad quadrata distantiarum applicatae.

<sup>(b)</sup> \* *Decrescet vis particulæ cuiusque, &c.* Nam cum vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particulæ sphaeræ in majori vel minori ratione quam

duplicatâ distantiarum a particulis decresceret, corpusculum extra sphaeram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato distantiae a centro sphaeræ.

<sup>(c)</sup> \* *Q. e. d.* Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphaera A sphaeram similem B attrahat, et vis acceleratrix quâ sphaeræ B particula quævis P in centrum C sphaeræ A urgetur est reciprocè ut quadratum distantiae P C a centro sphaeræ trahentis (per Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota

(<sup>d</sup>) *Corol. 1.* Attractiones sphaerarum, versus alias sphaeras homogeneas, sunt ut sphaera trahentes applicatae ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum, quas attrahunt.

*Corol. 2.* Idem valet, ubi sphaera attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, qua ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, (<sup>e</sup>) geminabitur vis attractionis mutuae, conservatis proportionibus.

*Corol. 3.* Eadem omnia, quae superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (<sup>f</sup>) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico: et corpora moventur extra sphaeram.

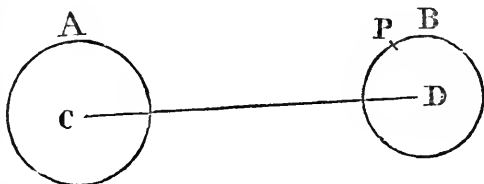
*Corol. 4.* Ea vero, quae de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (<sup>g</sup>) demonstrantur, (<sup>h</sup>) obtinent ubi motus peraguntur intra sphaeram.

attrahens manaret de corpusculo unico C sito in centro sphaerae trahentis A; vis autem tota acceleratrix qua sphaera integra B a corpusculo C trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi C versus centrum D sphaerae B, si modò illud corpusculum C a singulis sphaerae B particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hac hyp.) illa corpusculi C versus centrum D attractio (per Prop. 74.) reciproce proportionalis quadrato distantiae suae CD a centro D sphaerae B; Quare attractio sphaerae B versus C ut potè aequalis attractioni suppositae corpusculi C versus D, est in eadem ratione inversa quadrati distantiae CD. Q. e. d.

(<sup>d</sup>) \* *Cor. 1.* Vis acceleratrix qua sphaera B particula quavis P versus centrum C sphaerae A urgetur, est ut sphaera A applicata ad quadratum distantiae CP, (per Cor. 2. Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota attrahens quae esset ut sphaera A manaret de corpusculo unico C sito in centro sphaerae trahentis A; et similiter sphaera tota B ad centrum C trahitur ut corpusculum unicum in centro D situm (per Prop. 75.) vis autem acceleratrix qua corpusculum in centro D positum versus C trahitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu ut sphaera A directè et quadratum distantiae CD inversè. Quare attractiones sphaerarum acceleratrices versus alias sphaeras homogeneas sunt ut sphaera trahentes applicatae, &c.

(<sup>e</sup>) \* *Geminabitur vis attractionis mutuae, &c.* Si sphaera A sphaeram B vi propria attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphaerae B versus centrum C sphaerae trahentis A, ut  $\frac{A}{CD^2}$ , (per Cor. 2. Prop. 75.) jam si

sphaera B vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphaerae A versus B inde genita, erit ut  $\frac{B}{CD^2}$ , et vis illius motrix (15) ut  $\frac{B \times A}{CD^2}$ , quae



(per Leg. 3.) aequatur vi motrici sphaerae B versus sphaeram A ex reactione sphaerae A genitae. Quare dividendo per B, vis acceleratrix sphaerae B, versus centrum C sphaerae A, rursus erit ut  $\frac{A}{CD^2}$ , ideoque attractio tota acceleratrix sphaerae B, versus centrum sphaerae A, erit in distantia datà ut sphaera ipsa A, et in distantia variabili ut sphaera A ad quadratum distantiae applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphaerae A versus centrum sphaerae B. Observandum verò est quod si (ut hic supponitur) vires absolutae particularum utriusque sphaerae A et B aequales sint et utraque vi propria attractivà quantitati materiae proportionali praedita sit, attractio mutua dupla evadit.

(<sup>f</sup>) \* *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3<sup>a</sup>. 6<sup>l</sup>. 7<sup>a</sup>. 5<sup>a</sup>. 11<sup>a</sup>.)

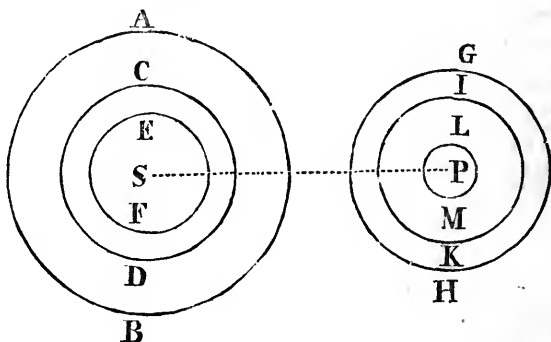
(<sup>g</sup>) \* *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

(<sup>h</sup>) \* *Obtinent, &c.* (Per Prop. 63.) ubi motus peraguntur intra sphaeram, hoc est, ubi intra sphaeram solidam via corporibus motis libera conceditur.

## PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

*Si sphaeræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem et vim attractivam) utcumque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes; et vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphaera una attrahit aliam, sit reciproce proportionalis quadrato distantiae centrorum.*

Sunto sphaeræ quotcunque concentricæ similes A B, C D, E F, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; et hæ (per Prop. LXXV.) trahent sphaeras alias quotcunque concentricas similes G H, I K, L M, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiae S P. <sup>(1)</sup> Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, quâ sphaera tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita A B, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam G H; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas unâ cum vi attractivâ, in progressu a circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; et, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphaeræ acquirant formam quamvis optatam; et



<sup>(1)</sup> \* Et componendo vel dividendo, &c. Hoc est, in datâ distantia centrorum communium S, P, sit attractio sphaerarum G H, I K, L M à sphaerâ A B, a, b, c; a sphaerâ C D, d, e, f; a sphaerâ E F, g, h, i: variante verò illâ distantia communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur respectivè secundum rationem illam

inversam quadrati distantiae centrorum, ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphaeræ G H, I K, L M a sphaeris A B, C D, E F attrahuntur in primâ distantia, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.

vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantiae quadratæ ratione inversâ. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si ejusmodi sphaeræ complures sibi invicem per omnia similes, se mutuò trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiiis, ut sphaeræ attrahentes.

(\*) *Corol. 2.* Inque distantiiis quibusvis inæqualibus, ut sphaeræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

*Corol. 3.* Attractiones verò motrices, seu pondera sphaerarum in sphaeras erunt, in æqualibus centrorum distantiiis, ut sphaeræ attrahentes et attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphaeris per multiplicationem producta.

(†) *Corol. 4.* Inque distantiiis inæqualibus, ut contenta illa directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

*Corol. 5.* Eadem valent, ubi attractio oritur a sphaeræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphaeram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportionè servatâ.

*Corol. 6.* Si hujusmodi sphaeræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiae inter centra revolventium et quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

*Corol. 7.* Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiae erunt <sup>(m)</sup> proportionales diametris.

*Corol. 8.* Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphaera attrahens formæ et conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

(\*) \* *Cor. 2.* Attractiones acceleratrices sphaerarum G H, I K, L M, &c. in sphaeras A B, C D, E F, &c. singularum versùs singulas sunt (per *Cor. 1. Prop. 75.*) ut sphaeræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra S, P. Quare componendo vel dividendo summa attractionum illarum omnium vel excessus aliquarum suprâ alias, hoc est, tota attractio acceleratrix sphaeræ compositæ G I M H versùs sphaeram compositam A C F B erit ut summa vel differentia sphaerarum concentricarum similium A B, C D, E F, &c. ad quadratum distantiae S P applicata. Sed si sphaeræ trahentes sunt sibi invicem per omnia similes, summæ illæ vel differentiæ sunt ut sphaeræ ipsæ. Quare patet veritas *Corol. 1.* et 2.

(†) \* *Cor. 4.* Corollaria 3<sup>um</sup>. et 4<sup>um</sup>. ex Co-

rollariis 1<sup>o</sup>. et 2<sup>o</sup>. manifesta sunt; Nam attractionis quantitas motrix, seu pondus sphaeræ attractæ in sphaeram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, seu in massam sphaeræ attractæ; vis autem acceleratrix (per *Cor. 2. Prop. hujus*) est ut sphaera attrahens applicata ad quadratum distantiae inter centra, et quantitates materiæ in sphaeris per omnia similibus, sunt ut volumina, seu ut sphaeræ ipsæ. Quare attractiones motrices seu pondera sphaerarum in sphaeras, sunt ut contenta sub sphaeris per multiplicationem producta directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

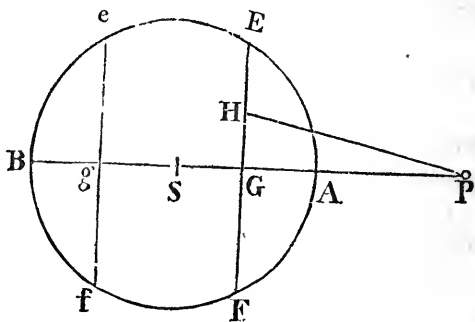
<sup>(m)</sup> \* *Proportionales diametris.* *Cor. 6.* et 7. constant per *Cor. 3. Prop. 4a*.

*Corol. 9.* <sup>(n)</sup> Ut et ubi gyrationia sunt etiam sphaeræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphaeræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphaerarum.*

*Cas. 1.* Sit A E B F sphaera; S centrum ejus; P corpusculum attractum, P A S B axis sphaeræ per centrum corpusculi transiens; E F, e f plana duo, quibus sphaera secatur, huic axi perpendicularia, et hinc inde æqualiter distantia a centro sphaeræ; G, g intersectiones planorum et axis; et H punctum quodvis in plano E F. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam P H exercita, est ut distantia P H; et (per Legum Corol. 2.) secundum lineam P G, seu versus centrum S, ut longitudo P G. Igitur



punctorum omnium in plano E F, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia P G multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso E F et distantia illa P G. Et similiter vis plani e f, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam P g, sive ut huic æquale planum E F ductum in distantiam illam P g; et summa virium plani utriusque ut planum E F ductum in summam distantiarum P G + P g, id est, ut planum illud ductum in duplam centri et <sup>(o)</sup> corpusculi distantiam P S, hoc est, ut duplum planum E F ductum in distantiam P S, vel ut summa æqualium planorum E F + e f ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphaerâ totâ, hinc inde æqualiter a centro sphaeræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam P S, hoc est, ut sphaera tota et ut distantia P S conjunctim. <sup>(p)</sup> Q. e. d.

<sup>(n)</sup> \* Ut et ubi gyrationia, &c. Patet per Cor. 2. Prop. 58. enim  $Pg = PG + 2GS$ , adeoque  $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$ .

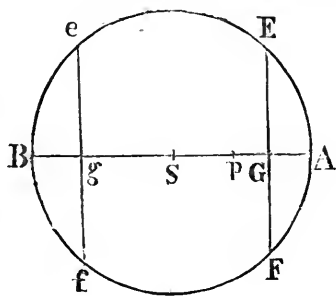
<sup>(o)</sup> \* Et corpusculi distantiam P S. Est <sup>(p)</sup> \* Q. e. d. Observandum est vires obli-

*Cas. 2.* Trahat jam corpusculum P sphaeram A E B F. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphaera illa trahitur, erit ut distantia P S. Q. e. d.

*Cas. 3.* Componatur jam sphaera altera ex corpusculis innumeris P; et quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro sphaerae primæ, <sup>(4)</sup> et ut sphaera eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphaerae; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphaera secunda trahuntur, hoc est, quâ sphaera illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphaera illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphaerae primæ, <sup>(5)</sup> et propterea proportionalis est distantiae inter centra sphaerarum. Q. e. d.

*Cas. 4.* Trahant sphaerae se mutuo, et vis geminata proportionem priorem servabit. Q. e. d.

*Cas. 5.* Locetur jam corpusculum p intra sphaeram A E B F; et quoniam vis plani e f in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo et distantia p g; et vis contraria plani E F ut solidum contentum sub plano illo et distantia p G; <sup>(6)</sup> erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiae distantiarum, id est, ut summa illa ducta in p S distantiam corpusculi a centro sphaerae. Et simili argumento, attractio planorum omnium E F, e f in sphaera totâ, hoc est, attractio sphaerae totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaera tota, et ut p S distantia corpusculi a centro sphaerae. Q. e. d.



*Cas. 6.* Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem A E B F sita; probabitur ut prius quod attractio,

quas G H, in plano quovis E F, ex utraque axis P B parte in æqualibus distantibus sumptas esse æquales et oppositas, nullumque proinde motum producere.

<sup>(4)</sup> \* Et ut sphaera eadem conjunctim, per Cas. 1.

<sup>(5)</sup> \* Et propterea proportionalis est distantia, &c. Si data est sphaera prima trahens per Cas. 2.

<sup>(6)</sup> \* Erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut  $e f \times p g - E F \times$

$p G$ . Est autem  $S g = S G$ , adeoque  $p g - p G = p S + S G - p G = 2 p S$ ; Quare cum sit etiam  $E F = e f$ , erit  $e f \times p g - E F \times p G = e f \times p g - p G = 2 e f \times p S = e f + E F \times p S$ . Si punctum G est inter p et S situm, vis tota erit ut  $e f \times p g + E F \times p G$ , et quoniam est semper  $S g = S G$ , atque in hoc casu  $p g + p G = p S + S G + p G = 2 p S$ , similiter invenietur vis tota ut  $e f + E F \times p S$ .

sive simplex sphaeræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, crit ut distantia centrorum p S. Q. e. d.

### PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si sphaeræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcumque dissimilares et inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similes; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum.*

Demonstratur ex Propositione præcedente eodem modo, quo Propositio LXXVI. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

*Corol.* Quæ superius in Propositionibus X. et LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphaericorum conditionis jam descriptæ, et attracta corpora sunt sphaeræ conditionis ejusdem.

#### *Scholium.*

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, et componentes corporum sphaericorum vires centripetas eâdem lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

(§) Quæ in Corollaris Prop. 76. ubi attractio sphaeræ versùs sphaeram erat quadrato distantiae centrorum reciproce proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus Propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphaeræ complures per omnia similes se mutuo trahant, attractiones accelera-

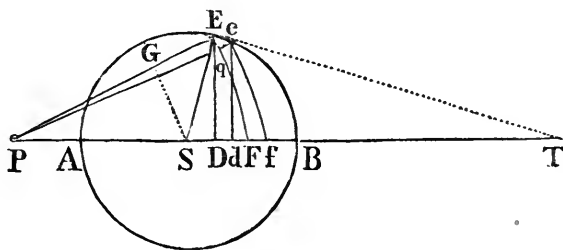
trices singularum in singulas erunt ut sphaeræ trahentes et distantiae inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut sphaeræ attrahentes et attractæ et distantiae inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur a sphaeræ utriusque virtute attractivâ mutuo exercitâ in sphaeram alteram.



## LEMMA XXIX.

*Si describantur centro S circulus quilibet A E B, et centro P circuli duo E F, e f, secantes priorem in E, e, lineamque P S in F, f; et ad P S demittantur perpendiculara E D, e d: dico quod, si distantia arcuum E F, e f in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis D d ad lineam evanescentem F f ea sit, quæ lineæ P E ad lineam P S.*

Nam si linea P e secet arcum E F in q; et recta E e, quæ cum arcu evanescente E e coincidit, producta occurrat rectæ P S in T; et ab S de-



mittatur in P E normalis S G: ob <sup>(i)</sup> similia triangula D T E, d T e, D E S; erit D d ad E e, ut D T ad T E, seu D E ad E S; et ob <sup>(ii)</sup> triangula E e q, E S G (per Lem. VIII. et Corol. 3. Lem. VII.) similia, erit E e ad e q seu F f ut E S ad S G; et ex æquo, D d ad F f ut D E ad S G; hoc est (ob similia triangula P D E, P G S) ut P E ad P S Q. e. d.

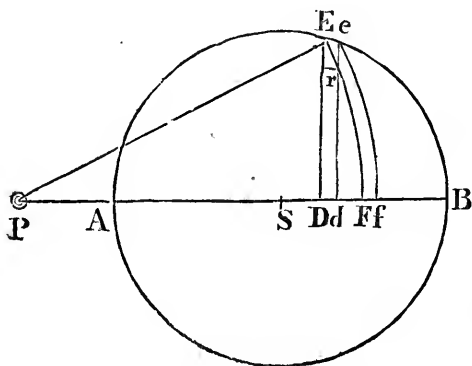
<sup>(i)</sup> \* Ob similia triangula D T E, d T e, D E S. Ob parallelas D E, d e, triangula D T E, d T e similia sunt; et quoniam recta T E circulum A E B tangit in E, erit angulus S E T rectus, et proinde demisso ex puncto E ad basim S T perpendicularo E D, erit triangulum D E S simile triangulo D T E (Prop. 8. Lib. 6. Elem.)

<sup>(ii)</sup> \* Et ob triangula E e q, E S G, &c. Anguli ad G et q recti sunt et proinde æquales; et quoniam anguli P E q, S E e sunt quoque recti et æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo S E q, anguli residui G E S, q E e, erunt etiam æquales. Quare triangula E e q, E S G sunt similia (Prop. 4. Lib. 6. Elem.)

## PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

*Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens  $E F f e$ , convolutione sui circa axem  $P S$ , describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in  $P$ , est in ratione compositâ ex ratione solidi  $D E q \times F f$ , et ratione vis quâ particula data in loco  $F f$  traheret idem corpusculum.*

Nam si primò consideremus vim superficiæ sphæricæ  $F E$ , quæ convolutione arcus  $F E$  generatur, et a linea  $d e$  ubivis secatur in  $r$ ; erit superficiæ pars annularis, convolutione arcus  $r E$  genita, ut lineola  $D d$ ,



manente sphære radio  $P E$  (uti (\*) demonstravit Archimedes in lib. de Sphæra et Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas  $P E$  vel  $P r$  undique in (†) superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiæ pars annularis; hoc est, ut lineola  $D d$ , vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphære radio  $P E$  et lineola illa  $D d$ : at secundum li-

(\*) 518. Uti demonstravit Archimedes, &c. Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus  $P E r$  rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus  $D E r$  æqualis angulo  $D P E$ , ob summum angulorum  $D P E + P E D$  recto  $P E r$  æqualem. Unde si ex puncto  $r$  in lineam  $D E$  demissum intelligatur perpendicularum quod æquale erit lineæ  $D d$ , constituetur triangulum evanescens simile triangulo  $E P D$ , critque adeo

$$D E : P E = D d : E r = \frac{P E \times D d}{D E}, \text{ sed}$$

(515) zona circularis convolutione arcus  $r E$  genita, est ut rectangulum  $r E \times D E$ ; Quare si in hoc rectangulo loco  $r E$  substituitur valor ipsius modò inventus, erit zona ut  $P E \times D d$ , hoc est, ob datum radium  $P E$ , ut  $D d$ . Q. e. d.

(†) • In superficie conicâ. Nam in convolu-

neam  $P S$  ad centrum  $S$  tendentem minor in ratione  $P D$  ad  $P E$ , <sup>(2)</sup> ideoque ut  $P D \times D d$ . Dividi jam intelligatur linea  $D F$  in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur  $D d$ ; et superficies  $F E$  dividetur <sup>(3)</sup> in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium  $P D \times D d$ , hoc est, ut  $\frac{1}{2} P F q - \frac{1}{2} P D q$ , ideoque ut <sup>(b)</sup>  $D E$  quad. Ducatur jam superficies  $F E$  in altitudinem  $F f$ ; et fiet solidi  $E F f e$  vis exercita in corpusculum  $P$  ut  $D E q \times F f$ : puta si detur vis quam particula aliqua data  $F f$  in distantia  $P F$  exercet in corpusculum  $P$ . <sup>(c)</sup> At si vis illa non detur, fiet vis solidi  $E F f e$  ut solidum  $D E q \times F f$  et vis illa non data conjunctim. Q. e. d.

tione puncti  $E$ , linea  $P E$  superficiem conicam describit.

<sup>(2)</sup> \* Ideoque ut  $P D \times D d$ . Nam si vis secundum directionem  $P E$  agens per lineam  $P E$  exponatur, vis illius pars quæ agit secundum directionem  $P S$ , exponetur per lineam  $P D$ ; erit  $P E$  ad  $P D$  ut rectangulum  $P E \times D d$  ad rectangulum  $P D \times D d$ , quod proinde sim illam secundum directionem  $P D$  exhibebit, vires autem obliquæ  $E D$  ab utraque axis  $P B$  parte se mutuò destruunt.

<sup>(3)</sup> \* Dividitur in totidem æquales annulos. (Per not. 518.)

<sup>(b)</sup> \* Et superficies  $F E$  dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium  $P D \times D d$ , hoc est, ut  $\frac{1}{2} P F q - \frac{1}{2} P D q$ , ideoque ut  $D E$  quad. Scilicet omnes  $P D$ , dum ex  $P D$  in  $P F$  mutantur uniformiter crescendo progressionem arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulae  $D d$  quibus lineæ  $P D$  successive augentur sunt æquales: ergo omnium  $P D$  summa eâ ratione invenitur quâ summæ progressionum arithmeticarum obtinentur, nempe primum et ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, et dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est  $P D$ , ultimus  $P F$  numerus vero terminorum  $D F$ , siquidem  $D F$  est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ  $P D$ , ergo summa omnium  $P D$  est  $\frac{P F + P D \times D F}{2}$  sive

(quia  $D F$  est differentia linearum  $P F$  et  $P D$ )  
est summa omnium  $P D = \frac{P F + P D \times P F - P D}{2}$   
sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ et differ-

entiæ duarum linearum æquatur differentię quadratorum ipsorum, ergo  $\frac{P F + P D \times P F - P D}{2}$

$= \frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2$  et summa omnium  $P D \times D d = \frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2 \times D d$ , sed  $D d$  est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiei  $F E$  quæ sunt ut summa omnium  $P D \times D d$  sunt ut  $\frac{1}{2} P F^2 - \frac{1}{2} P D^2$  sive ut  $P F^2 - P D^2$  sed  $P F^2$  est æquale  $P E^2$  per constr. et  $P E^2 - P D^2 = D E^2$  (per 47. 1. El.) ergo vires superficiei  $F E$ , sunt ut  $D E^2$ . Q. e. d.

Idem aliter. Sit radius datus  $P E = a$ , variabilis  $F D = x$ , erit fluxio  $D d = d x$ , et  $P D = a - x$ , atque adeò  $P D \times D d = a d x - x d x$ , et sumptis utrinque fluentibus (165)  $S. P D \times D d = a x - \frac{1}{2} x x = \frac{2 a x - x x}{2} = \frac{D E^2}{2}$ , (Prop. 13. Lib. 6.

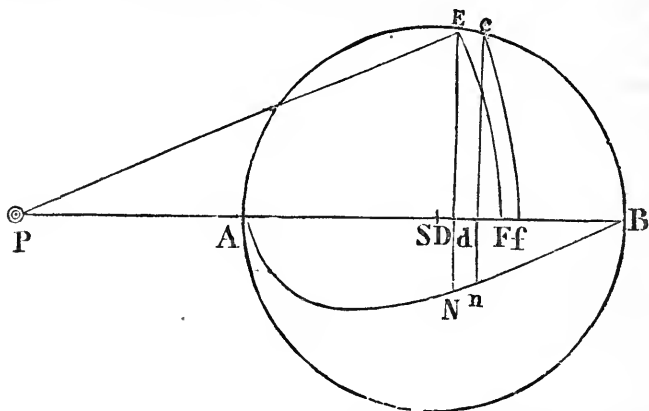
Elem.) Quare vis superficiei convolutione arcus  $F E$  genitæ erit ut  $D E^2$ .

<sup>(c)</sup> \* At si vis illa non detur, &c. Zona convolutione arcus  $E e$  genita ducatur in datam altitudinem  $F f$ , et erit annuli solidi inde geniti vis secundum lineam  $P E$  undiquæ exercita ut hic ipse annulus et vis lineolæ  $F f$  conjunctim, hoc est, si vis lineolæ  $F f$  dicatur  $V$ , ut  $P E \times D d \times F f \times V$  (518). At vis annuli secundum lineam  $P S$  minor erit in ratione  $P D$  ad  $P E$ , ideoque erit ut  $P D \times D d \times F f \times V$ . Et quoniam variante  $P D$ , manet factum  $F f \times V$  quod nimirum vis  $V$  in singulis particulis datis  $F f$ , æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut supra, erit vis tota solidi  $E F f e$ , in corpusculum  $P$  secundum lineam  $P S$  exercita ut  $D E^2 \times F f \times V$ .

## PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad sphaeræ alicujus  $A B E$ , centro  $S$  descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, et ad sphaeræ axem  $A B$ , in quo corpusculum aliquod  $P$  locatur, erigantur de punctis singulis  $D$  perpendiculara  $D E$ , sphaeræ occurrentia in  $E$ , et in ipsis capiantur longitudines  $D N$ , quæ sint ut quantitas  $\frac{D E q \times P S}{P E}$  et vis, quam sphaeræ particula sita in axe ad distantiam  $P E$  exercet in corpusculum  $P$ , conjunctim : dico quod vis tota, quâ corpusculum  $P$  trahitur versus sphaeram, est ut area  $A N B$  comprehensa sub axe sphaeræ  $A B$ , et lineâ curvâ  $A N B$ , quam punctum  $N$  perpetuo tangit.

Etenim stantibus quæ in Lemmate et Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem sphaeræ  $A B$  dividi in particulas innumeras æquales



$D d$  et sphaeram totam dividi in totidem laminas sphaericas concavo-convexas  $E F f e$ , et erigatur perpendicularum  $d n$ . Per Theorema superius vis, quâ lamina  $E F f e$  trahit corpusculum  $P$ , est ut  $D E q \times F f$  et vis particulæ unius ad distantiam  $P E$  vel  $P F$  exercita conjunctim. Est autem (per Lemma novissimum)  $D d$  ad  $F f$  ut  $P E$  ad  $P S$ , et inde  $F f$  æqualis  $\frac{P S \times D d}{P E}$ ; et  $D E q \times F f$  æquale  $D d$  in  $\frac{D E q \times P S}{P E}$ , et propterea vis laminæ  $E F f e$  est ut  $D d$  in  $\frac{D E q \times P S}{P E}$  et vis particulæ ad distantiam  $P F$  exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut  $D N \times D o$ , seu area evanescens  $D N n d$ . Sunt igitur laminarum om-

nium vires, in corpus P exercitæ, ut areae omnes D N n d, hoc est, sphaeræ vis tota ut area tota A N B. Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiiis, et fiat D N ut  $\frac{D E q \times P S}{P E}$ ; erit vis tota, quâ corpusculum a sphaera attrahitur, <sup>(d)</sup> ut area A N B.

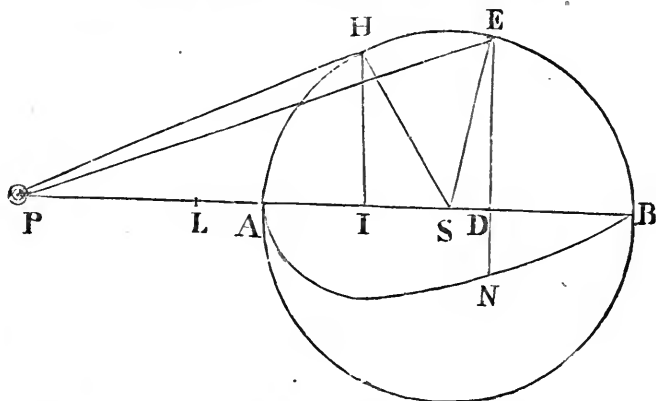
*Corol. 2.* Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi a se attracti, et fiat <sup>(e)</sup> D N ut  $\frac{D E q \times P S}{P E q}$ ; erit vis, quâ corpusculum P a sphaerâ totâ attrahitur, ut area A N B.

*Corol. 3.* Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiae corpusculi a se attracti, et fiat D N ut  $\frac{D E q \times P S}{P E q q}$ ; erit vis, quâ corpusculum a totâ sphaerâ attrahitur, ut area A N B.

*Corol. 4.* Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas V, fiat autem D N ut  $\frac{D E q \times P S}{P E \times V}$ ; erit vis, quâ corpusculum a sphaerâ totâ attrahitur, ut area A N B.

## PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

*Stantibus jam positis, mensuranda est area A N B.*

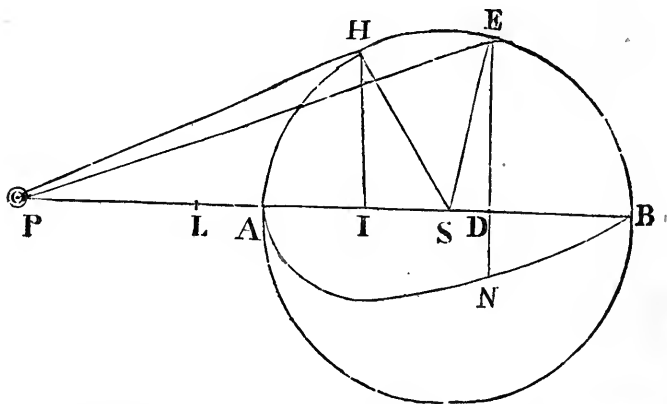


A puncto P ducatur recta P H sphaeram tangens in H, et ad axem

<sup>(d)</sup> \* Ut area A N B. Nulla enim habenda est ratio vis particulæ F f quæ eadem in omnibus distantiiis manet ex hyp.

<sup>(e)</sup> \* Fiat D N, &c. Substitutâ quantitate  $\frac{1}{P E}$  loco vis particulæ F f.

P A B demissa normali H I, bisecetur P I in L; et erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) P E q æquale P S q + S E q + 2 P S D. Est autem S E q seu S H q (ob <sup>(f)</sup> similitudinem triangulorum S P H, S H I) æquale rectangulo P S I. Ergo P E q æquale est contento sub P S et P S + S I + 2 S D, hoc <sup>(g)</sup> est, sub P S et 2 L S + 2 S D, id est, sub P S et 2 L D. Porrò D E quad. æquale est S E q — S D q, seu <sup>(†)</sup> S E q — L S q + 2 S L D — L D q, id est, 2 S L D — L D q — A L B. Nam L S q — S E q seu L S q — S A q (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo A L B. Scribatur itaque 2 S L D — L D q — A L B pro D E q; et quantitas  $\frac{D E q \times P S}{P E \times V}$ , quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ D N, resolvit sese in tres partes  $\frac{2 S L D \times P S}{P F \times V} - \frac{L D q \times P S}{P E \times V} - \frac{A L B \times P S}{P E \times V}$ : ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, et pro P E medium proportionale inter P S et 2 L D; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, <sup>(h)</sup> quarum aræ per methodos vulgatas innotescunt. Q. e. f.



<sup>(f)</sup> \* Ob similitudinem triangulorum, &c. (Per Prop. 13. Lib. 6. Elem.)

<sup>(g)</sup> \* Hoc est sub P S et 2 L S + 2 S D. Ob P S + S I = P I + 2 S I = 2 L I + 2 S I = 2 L S.

<sup>(†)</sup> \* Seu S E<sup>2</sup> — L S<sup>2</sup>, &c. Ob S D = L D — L S, adeoque S D<sup>2</sup> = L D<sup>2</sup> — 2 S L D + L S<sup>2</sup>.

<sup>(h)</sup> 519. Quarum aræ per methodos vulgatas innotescunt. Sint variables P E = z, L D =

x, adeoque D d = d x, sint constantes P A = a, P B = b, P S = c, et L S = m, L A = p, L B = q, et erit aræ A N D fluxio D N × d x ut  $\frac{2 m c x d x}{z V} - \frac{c x x d x}{z V} - \frac{p q c d x}{z V}$ ; quoniam verò P E<sup>2</sup> (z z) = 2 P S × L D (2 c x), est x =  $\frac{z z}{2 c}$  et d x =  $\frac{z d z}{c}$ , quibus valoribus loco x et d x in formula substitutis illa in hanc mutatur  $\frac{m z^2 d z}{c V} - \frac{z^4 d z}{4 c^2 V} - \frac{p q d z}{V}$ .

*Exempl. 1.* Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam P E; dein  $2 \text{ P S} \times \text{L D}$  pro P E q, et fiet D N ut  $\text{S L} - \frac{1}{2} \text{L D} - \frac{\text{A L B}}{2 \text{L D}}$ . Pone D N æqua-

lem ejus duplo  $2 \text{S L} - \text{L D} - \frac{\text{A L B}}{\text{L D}}$ : et ordinatæ pars data  $2 \text{S L}$  ducta in longitudinem A B describet aream rectangulam  $2 \text{S L} \times \text{A B}$ ; et pars indefinita L D ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini L D, (<sup>†</sup>) describet aream  $\frac{\text{L B q} - \text{L A q}}{2}$ , (<sup>†</sup>) id est, aream  $\text{S L} \times \text{A B}$ ; quæ subducta de areâ priore  $2 \text{S L} \times \text{A B}$

Sit vis attractiva ut distantiae z dignitas  $\frac{1}{z^n}$  erit  $V = z^n$ , quo valore loco V in formulâ posito, fiet  $\text{D N} \times \text{d x}$  ut  $\frac{m z^{2-n} \text{d z}}{c} - \frac{z^{4-n} \text{d z}}{4 c^2}$

— p q z<sup>—n</sup> d z, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit  $\text{S. D N} \times \text{d x}$ ,

seu area AND, ut  $\frac{m z^{3-n}}{3-n} - \frac{z^{5-n}}{5-n} - \frac{p q a^{1-n}}{1-n} + \text{Q constans.}$  Sed fluens illa

evanescere debet dum fit P E (z) = P A (a)

est ergo  $\text{Q} = \frac{a^{5-n}}{5-n} - \frac{p q a^{1-n}}{1-n} -$

$\frac{m a^{3-n}}{3-n} \times c$  ac proinde fluens accurata ubi P E

(z) = P B (b) erit  $\frac{m b^{3-n}}{3-n} - \frac{b^{5-n}}{5-n} - \frac{p q b^{1-n}}{1-n} +$

$\frac{m a^{3-n}}{3-n} \times c$

—  $\frac{p q a^{1-n}}{1-n} + \frac{p q a^{1-n}}{5-n} \times 4 c^2 + \frac{p q a^{1-n}}{1-n}$

—  $\frac{m a^{3-n}}{3-n} \times c$

520. Cùm sit semper  $\text{P E}^2 = 2 \text{P S} \times \text{L D}$ ;

et ubi P E fit P B sit L D = L B, ubi verò

P E fit P A sit L D = L A, erit P B<sup>2</sup> (b<sup>2</sup>)

= 2 P S × L B (2 c q) et P A<sup>2</sup> (a<sup>2</sup>) =

2 P S × L A (2 c p) quibus valoribus, loco b<sup>2</sup>

et a<sup>2</sup> substitutis, formula fit

$\frac{2 m q b^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2 b^{1-n}}{5-n} - \frac{p q b^{1-n}}{1-n} +$

$\frac{p^2 a^{1-n}}{5-n} + \frac{p q a^{1-n}}{1-n} - \frac{2 m p a^{1-n}}{3-n},$

et restitutis litteris figuræ

$\frac{2 \text{S L B} \times \text{P B}^{1-n}}{3-n} - \frac{\text{L B}^2 \times \text{P B}^{1-n}}{5-n}$

—  $\frac{\text{A L B} \times \text{P B}^{1-n}}{1-n} + \frac{\text{A L}^2 \times \text{P A}^{1-n}}{5-n}$

+  $\frac{\text{A L B} \times \text{P A}^{1-n}}{1-n} - \frac{2 \text{S L A} \times \text{P A}^{1-n}}{3-n}$

521. Cor. 1. Hinc liquet aream A N B, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est n = 1 vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantie simpliciter, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores 1 — n, 3 — n, 5 — n, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infra positus patebit.

(<sup>†</sup>) 522. Describet aream  $\frac{\text{L B q} - \text{L A q}}{2}$ .

Area, quam describet, erit trapezium, nam si a puncto L in longitudinem A B semper erigantur perpendiculara æqualia L D, omnes terminabuntur in recta linea ducta a puncto L in terminum perpendiculari in B erecti et æquali L B, sicque formabitur triangulum cujus pars secundum A B sita est area quæsita, et ea erit trapezium cujus latera in A et B perpendicularia, inter se parallela sunt, et latus puncto A insitens erit æquale L A, latus verò oppositum in B erectum erit æquale L B, hujus ergo trapezii superficies erit  $\frac{\text{L A} + \text{L B}}{2} \times \text{A B}$ , sed A B

= L B — L A, ergo per 6. 2. El.  $\frac{\text{L A} + \text{L B}}{2}$

$\times \text{L B} - \text{L A} = \frac{\text{L B}^2 - \text{L A}^2}{2}$ : (quod

trapezium est æquale trapezio A a B in figurâ Newtonianâ descripto, ut liquet per ejus figuræ const.)

(<sup>†</sup>) Id est, aream  $\text{S L} \times \text{A B}$ , cùm enim hæc

area sit  $\frac{\text{L A} + \text{L B}}{2} \times \text{A B}$ , sitque L B

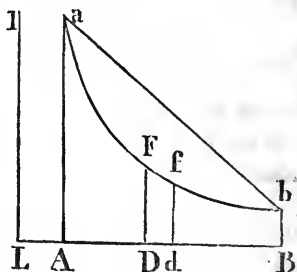
= L A + 2 A S erit  $\frac{\text{L A} + \text{L B}}{2} \times \text{A B} = 2 \text{L A}$

+ 2 A S = 2 L S unde  $\frac{\text{L A} + \text{L B}}{2} \times \text{A B}$

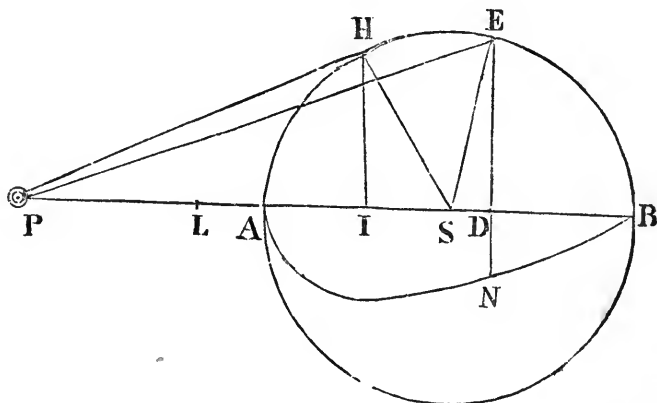
= L S × A B. Unde etiam sequitur trape-

zium A a B rectangulo L S × A B esse æquale

relinquit aream  $SL \times AB$ . Pars autem tertia  $\frac{ALB}{LD}$ , ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ  $SL \times AB$  relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta  $L, A, B$  erige perpendiculara  $Ll, Aa, Bb$ , quorum  $Aa$  ipsi  $LB$ , et  $Bb$  ipsi  $LA$  æquetur. Asymptotis  $Ll, LB$  per puncta  $a, b$  describatur hyperbola  $ab$ . Et acta chorda  $ba$  claudet aream  $aba$  areâ quæsitâ  $ANB$  æqualem.



*Exempl. 2.* Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciproçè ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applica-



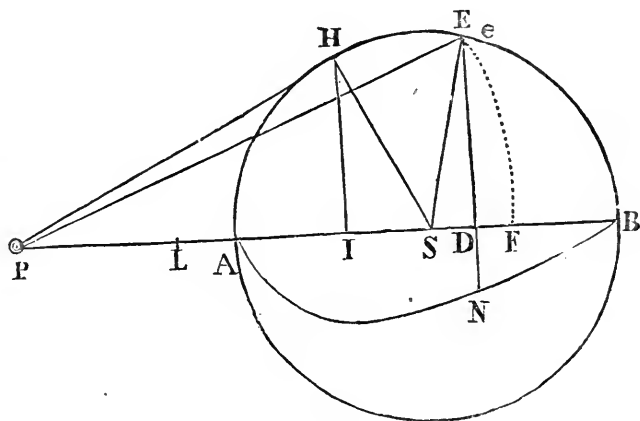
Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit  $AD = x, Dd = dx$  erit areâ  $AND$  fluxio  $DN \times Dd = 2SL \times dx - LA \times dx - xdx = \frac{ALB \times dx}{LD}$ . Primi termini  $2SL \times dx$ , fluens (165) est  $2SL \times x = 2SL \times AB$ , ubi  $AD$ , seu  $x = AB$ . Secundi termini  $LA \times dx + xdx$ , fluens est  $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{2LA + AB \times AB}{2} = LS \times AB$ , quando  $x$ , seu  $AD$ , fit  $AB$ . Quare duorum priorum terminorum fluens est  $2SL \times AB - SL \times AB$  sive  $SL \times AB$ . Jam ut tertii termini  $\frac{ALB \times dx}{LD}$  fluens inveniatur describatur hyperbola  $AB$ , prout Newtonus præscribit,

et super asymptoto  $LB$  erigantur perpendiculara duo infinitè propinqua,  $DF, df$ , hyperbolæ occurrentia in  $F$  et  $f$ , sitque  $AD = x, Dd = dx$ , et erit (per Theor. 4. de Hyperbolâ)  $LA \times Aa = LD \times DF$ , adeoque  $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$ , et  $DF \times Dd$ , seu fluxio areâ  $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$ . Quare area hyperbolica  $AaFD$ , æqualis est fluenti tertii termini, et area hyperbolica  $AabB$ , est ejusdem termini fluens, ubi  $x$ , seu  $AD = AB$ . Hæc igitur subducta de rectangulo  $SL \times AB$ , sive de trapezio  $AabB$  ipsi æquali, relinquet aream quæsitam  $ANB$ . Relinquitur autem area  $aFb$ ; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi  $P$  a



tus ad planum quodvis datum; scribe  $\frac{P E \text{ cub.}}{2 A S q}$  pro V, dein  $2 P S \times L D$  pro P E q; et fiet D N ut  $\frac{S L \times A S q}{P S \times L D} - \frac{A S q}{2 P S} - \frac{A L B \times A S q}{2 P S \times L D q}$ , id  
 (k) est (ob continuè proportionales P S, A S, S I) ut  $\frac{L S I}{L D} - \frac{1}{2} S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D q}$ . Si ducantur hujus partes tres in longitudinem A B, prima  $\frac{L S I}{L D}$  generabit aream hyperbolicam; secunda  $\frac{1}{2} S I$  aream  $\frac{1}{2} A B \times S I$ ; tertia  $\frac{A L B \times S I}{2 L D q}$  aream  $\frac{A L B \times S I}{2 L A} - \frac{A L B \times S I}{2 L B}$ , id est  $\frac{1}{2} A B \times S I$ . De primâ subducatur summa secundæ et tertiæ, et manebit area



sphærâ evanescat, erit  $B b = L A = 0$  ideoque hyperbola A F b cum suis asymptotis L l, L B congruet nullaque erit ejus area. Quare corpusculo posito in A, seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum  $S L \times A B = 2 A S^2$ , ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

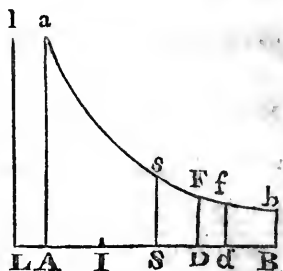
524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphæræ convolutione superficiei AEF, genitam trahitur est ut  $L B - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$ ; Nam (per not. 522.) vis illa est ut  $2 S L \times x - L A \times x - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$ , et  $2 S L = 2 L A + 2 A S$  et  $2 S L - L A = L A + 2 A S = L B$ , unde vis illa est  $L B - \frac{1}{2} x \times x - A a F D$ ; sed P posito in contactu sphæræ est  $L B = A B$  et areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu

$A B - \frac{1}{2} x \times x$ , sive  $A B - \frac{1}{2} A D \times A D$ .

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpusculi P versùs sphæram totam est ut  $S L \times A B - A a b B$ , ejusdem attractio versùs portionem sphæræ convolutione superficiei F E e B (fig. Prop. 80.) genitam, erit ut  $S L \times A B - L B \times x + \frac{1}{2} x \times x + A a F D - A a b B = S L \times A B - L B \times A D + \frac{1}{2} A D^2 - D F b B$ , sive substitutis  $L A + \frac{1}{2} A B$  pro S L,  $L A + A B$  loco L B, et pro A B - A D posito B D fiet ut  $L A + \frac{1}{2} B D \times B D - D F b B$ , et corpusculo in contactu posito, erit ut  $\frac{1}{2} B D^2$ .

(k) \* Id est, ob continuè proportionales, &c. Per Prop. 8. l. 6. El. undè  $A S^2 = P S \times S I$ .

quæsita A N B. <sup>(1)</sup> Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendiculara L l, A a, S s, B b, quorum S s ipsi S I æquetur, perque punctum s asymptotis L l, L B describatur hyperbola a s b occurrens perpendicularis A a, B b in a et b; et rectangulum 2 A S I subductum de area hyperbolica A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.



*Exempl. 3.* Si vis centripeta, ad singulas sphaeræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiae a particulis; scribe  $\frac{P E q q}{2 A S \text{ cub.}}$

<sup>(1)</sup> 526. \* Unde talis emergit problematis constructio. Sit, ut suprà A D = x, D d = d x, erit area A N D, fluxio D N × D d, ut  $\frac{L S I \times d x}{L D} - \frac{1}{2} S I \times d x - \frac{A L B \times S I \times d x}{2 L A + x^2}$ .

Jam ut primi termini  $\frac{L S I \times d x}{L D}$ , fluens habeatur, describatur hyperbola a s b, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendicularis D F, d f, sit A D = x, D d = d x, et quoniam (per Theor. 4. de Hyperbolâ)  $L S \times S I = L D \times D F$ , erit  $D F = \frac{L S I}{L D}$ , et D F

$\times D d = \frac{L S I \times d x}{L D}$ . Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam A a s b B, æqualem esse fluenti primi termini, dum A D seu x = A B; secundi termini  $\frac{1}{2} S I \times d x$ , fluens est  $\frac{1}{2} S I \times A D = \frac{1}{2} S I \times A B$ , dum fit A D = A B; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis  $\frac{d x}{(L A + x)^2}$  flu-

ens (165) est  $-\frac{1}{L A + x} + Q$  constans; et quoniam fluens illa evanescere debet ubi x = o, erit  $Q = \frac{1}{L A}$ . Quare fluens accurata est

$\frac{1}{L A} - \frac{1}{L D} = \frac{1}{L A} - \frac{1}{L B}$ , ubi x = A B.

Est igitur tertii termini  $\frac{1}{2} A L B \times S I \times \frac{d x}{L A + x^2}$  fluens =  $\frac{A L B \times S I}{2 L A} -$

$\frac{A L B \times S I}{2 L B} = \frac{1}{2} L B \times S I - \frac{1}{2} L A \times S I = \frac{1}{2} A B \times S I$ , undè summa 2<sup>a</sup> et 3<sup>a</sup> termini est  $A B \times S I = 2 A S \times S I$ . Quare rectangulum 2 A S I subductum de areâ hyperbolâ A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.

527. Cor. 1 Si corpus P sphaeram tangat in

A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu L A = o et A a cum asymptoto L l coincidit, ac proinde attractio per aream hyperbolâ infinitam B L l a s b exponitur.

528. Corol. 2. Vis quâ corpusculum P in sphaeræ portionem convoluzione superficiæ AEF genitam, trahitur, est ut A a F D -  $\frac{1}{2} S I \times$

$A D - \frac{1}{2} L B \times S I + \frac{A L B \times S I}{2 L D}$ , ut ex

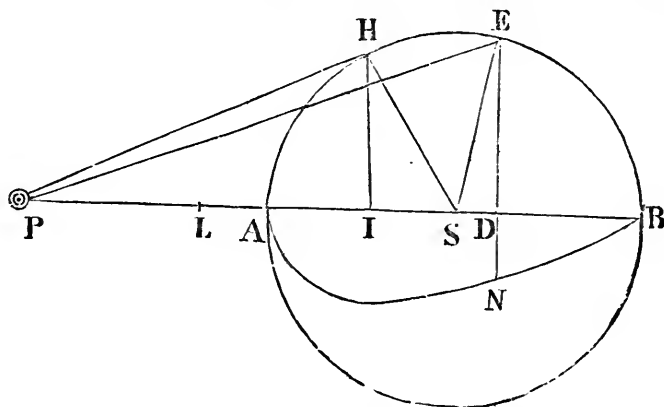
notâ 526. manifestum est. Quare in contactu ubi L A = o, erit vis illa ut area infinita A a F D, cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescent.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphaeram totam est ut area hyperbolica A a s b B - 2 A S I, ejusdem attractio versùs portionem concavo-convexam, convoluzione superficiæ F E e B, genitam, erit ut A a s b B - A a F D - 2 A S I +  $\frac{1}{2} A D \times S I + \frac{1}{2} L B \times S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D} = D F b B + \frac{1}{2} L A - \frac{1}{2} B D \times S I - \frac{A L B \times S I}{2 L D}$ ,

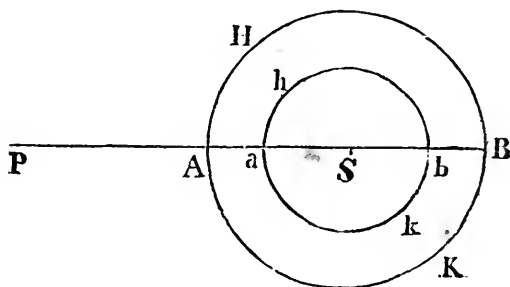
ponendo A B pro 2 A S,  $\frac{1}{2} L A + \frac{1}{2} A B$  pro  $\frac{1}{2} L B$ , et  $\frac{1}{2} B D$  pro  $\frac{1}{2} A B - \frac{1}{2} A D$ .

530. Cor. 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphaeram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphaeram totam solidam detrahatur attractio in sphaeram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphaeram cavam A a H B K a, interiorem concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphaeram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphaeram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphaeram concavam A a H B K a; quin imò, si ex sphaerâ concavâ detrahatur pars quævis a contactu remota ut H h B K k, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuum H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (per Cor. 2. et 3).

pro V, dein  $\sqrt{2PS \times LD}$  <sup>(m)</sup> pro PE, et fiet DN ut  $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$   
 $\times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}.$



<sup>(n)</sup> Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producant areas totidem, viz.  $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$  in  $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$ ;  $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$  in



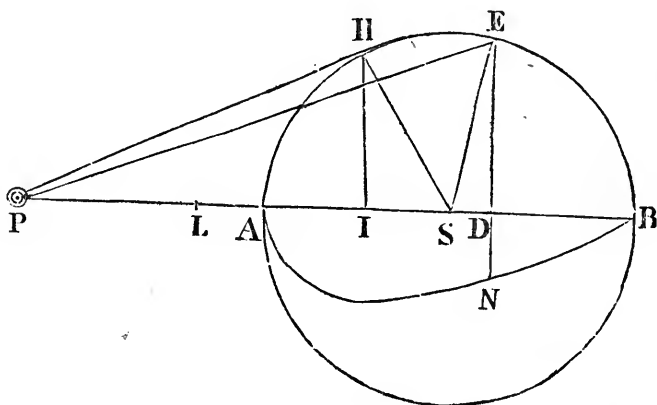
<sup>(m)</sup> \* Pro PE. Erit  $PE^5 = 4PS^2 \times LD^2$   
 $\times \sqrt{2PS \times LD}$ , et  $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$ .  
 Unde fiet  $\frac{SLD \times PS}{4SLD \times PS \times AS^3} = \frac{PE^5}{4SL \times LD \times PS^2 \times SI \sqrt{PS \times SI}} =$   
 $\frac{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}}{SL \times SI \sqrt{SI}} = \frac{LD \sqrt{2LD}}{LD \sqrt{2SI \times LD}} =$   
 $\frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$ . Et ita de cæteris terminis.

<sup>(n)</sup> Cujus tres partes, &c. Sit AD = x fluxio. AD = dx, et erit areæ A N D fluxio

DN  $\times dx$ , ut  $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}} -$   
 $\frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}}$ , quantitatis  $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}}$ , seu  
 $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{5}{2}}$  d x fluens est  $\frac{-2}{LA+x}^{\frac{1}{2}} + Q$   
 const. (165) quæ evanescere debet ubi x = 0;  
 quare erit  $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$  et fluens accurata =  
 $\frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$ , dum fit x = AB. Primi

$$\sqrt{LB} - \sqrt{LA}; \text{ et } \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \text{ in } \frac{1}{\sqrt{LA} \text{ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB} \text{ cub.}}$$

(<sup>o</sup>) Et hæ post debitam reductionem fiunt  $\frac{2SIq \times SL}{LI}$ ,  $SIq$ , et  $SIq +$



$\frac{2SI \text{ cub.}}{3LI}$ . Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt

$\frac{4SI \text{ cub.}}{3LI}$ . Proinde vis tota, quâ corpusculum P in sphaeræ centrum

igitur termini fluens erit  $\frac{2SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$  in  $\frac{1}{\sqrt{LA}}$   
 $-\frac{1}{\sqrt{LB}}$ . Quantitatis  $\frac{LA+x}{2}$ , fluens  
 est  $2(LA+x)^{\frac{5}{2}} + Q \text{ const. et factâ } x=0$ ,  
 invenitur  $Q = -2\sqrt{LA}$ ; quare fluens ac-  
 curata est  $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$ , dum  $x =$   
 $AB$ . Secundi igitur termini fluens erit  
 $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ , in  $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$ .

Quantitatis  $\frac{dx}{LA+x}$ , fluens est  $\frac{-2}{5(LA+x)^{\frac{5}{2}}}$   
 $+ Q$ , et  $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$ , undè fluens inte-  
 gra erit  $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}} - \frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$ , ubi  $x =$   
 $AB$ , et proinde tertii termini fluens est  
 $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$  in  $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$ .

(<sup>o</sup>) \* Et hæ post debitam reductionem, &c.  
 Est  $PS \times SI = AS^2$  (per Prop. VIII. Lib. VI.  
 Elem.) sed  $PS = LS + LI$ , ob  $PL =$   
 $LI$ , (per constr.) et  $SI = LS - LI$ , ergò  
 $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$ , et  
 hinc  $LI^2 = LS^2 - AS^2 = LS + AS$

$\times LS - AS = LB \times LA$ . Quare  $LI$  sive  
 $LS - SI = \sqrt{LA \times LB}$ , et  $2LS -$   
 $2SI = 2\sqrt{LA \times LB}$ , et  $2SI = 2LS$   
 $- 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA}$   
 $+ LA$ , et extractâ utrinque radice quadratâ  
 $\sqrt{2SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$ . His positis,  
 facilis est terminorum reductio; erit enim,

$$-\frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2SI}}{LI}.$$

Quare patet primum fluentis terminum esse  
 $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$ ; secundum verò esse  $SI^2$ .

Tertius terminus, reductione ad communem  
 denominatorem factâ, est  $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2SI}}$

$$\times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{LA \times LB \sqrt{LA} \times LB} =$$

$$\frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{5LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}.$$

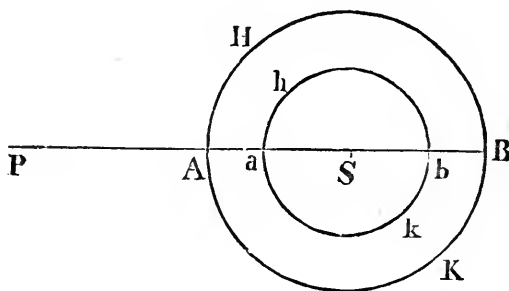
Peractâ di-  
 visione invenitur

$$\frac{LB^{\frac{5}{2}} - LA^{\frac{5}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$$

$$LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI +$$

trahitur, est ut  $\frac{S I \text{ cub.}}{P I}$ , ( $P$ ) id est, reciprocè ut  $P S \text{ cub.} \times P I$ . Q. e. i.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.



$LA = 2SI + 3LI$ , ob  $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$ . Quare tertius terminus est  $\frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2$

+  $\frac{2SI^3}{3LI}$ , unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt

$$\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times SL - LI - 2SI^3}{3LI}, \text{ sed quia}$$

$$SL - LI = SI \text{ fiunt } \frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} =$$

$$\frac{4SI^3}{3LI}$$

( $P$ ) \* *Id est reciprocè ut  $PS^3 \times PI$ . Nam cum sit  $PS \times SI = AS^2$ , ideòque  $SI = \frac{AS^2}{PS}$ , hinc, dato radio  $AS$ , est  $SI$  ut  $\frac{1}{PS}$ ,*

$SI^3$ , ut  $\frac{1}{PS^3}$ ; est verò  $LI = \frac{1}{2}PI$  ideòque

etiam et  $LI$  ut  $PI$ , unde erit  $\frac{4SI^3}{3LI}$  ut

$$\frac{1}{PS^3 \times PI}, \text{ neglectâ fractione } \frac{4}{3}.$$

531. Cor. 1. In accessu corporis  $P$  ad sphæram, ita crescit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit  $P$  cum  $A$ , puncta  $H$  et  $I$  cum eodem puncto  $A$  coincidunt, fitque  $PI = 0$ , et proindè quantitas  $\frac{1}{PS^3 \times PI}$  infinita.

532. Cor. 2. Attractio corpusculi in contactu  $A$  positi versùs sphæram cavam  $A$   $H B K a$ , infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinitâ versùs sphæram solidam

$A H B K S$ , subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem  $a h b k S$ .

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet a quadraturâ hyperbolæ, ubi nempe vis est ut  $PE^5$  reciprocè (520). Scribe igitur

$$\frac{PE^5}{2AS^4}, \text{ pro } V; \text{ dein } 8PS^3 \times LD^3 \text{ pro } PE^6, \text{ et } PS \times SI \text{ pro } AS^2, \text{ unde est}$$

$$\frac{PE \times V}{PS} = \frac{SI^2}{4LD^3} \text{ et fiet } DN, \text{ ut } \frac{SL \times SI^2}{4LD^3} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3} \text{ seu, ut } \frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2}{LD^3}; \text{ undè fluxio}$$

$$DN \times Dd, \text{ erit ut } \frac{SL \times SI^2 \times dx}{LA + x^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA + x} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times dx}{LA + x^3}, \text{ positi}$$

$$AD = x.$$

$$\text{Quantitatis } \frac{dx}{LA + x^2}, \text{ fluentem suprà (526) invenimus esse}$$

$$\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB - LA}{LA \times LB}$$

$$= \frac{AB}{LI^2} \text{ ubi } x \text{ seu } AD = AB. \text{ Quare pri-}$$

$$\text{mi termini fluens erit } \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}.$$

$$\text{Quantitatis } \frac{dx}{LA + x^3}, \text{ fluens} = \frac{-1}{2(LA + x)^2}$$

$$+ Q \text{ const. quæ evanescere debet positi } x, \text{ seu}$$

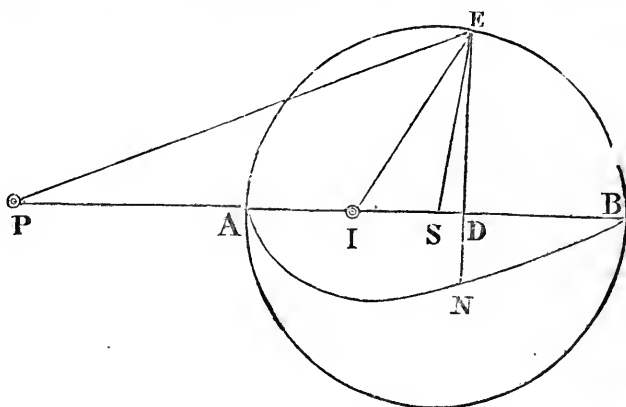
$$AD = 0, \text{ quare erit } Q = \frac{1}{2LA^2} \text{ et fluens}$$

$$\text{accurata, ubi } AD = AB, \text{ erit } \frac{1}{2LA^2} -$$

## PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In sphærâ centro S intervallo S A descriptâ, si capiantur S I, S A, S P continuè proportionales : dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis I, attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum a centro I S, P S, et subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P et I, ad centrum tendentium.*

Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciprocè ut distantie corpusculi a se attracti; vis, quâ corpusculum situm in I trahitur a sphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compositâ ex sub-



duplicatâ ratione distantie S I ad distantiam S P, et ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco I, a particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum S I, S P ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, et propterea attrac-

$$\frac{1}{2 L B^2} = \frac{L B^2 - L A^2}{2 L A^2 \times L B^2} = \frac{2 S L \times A B}{2 L I^4} = \frac{S L \times A B}{L I^4};$$

$$\frac{1}{2} \frac{A L B \times S I^2 \times S L \times A B}{L I^4} = \frac{1}{2} \frac{S L \times S I^2 \times A B}{L I^2},$$

et differentia fluentium primi et tertii termini erit  $\frac{1}{2} \frac{S L \times S I^2 \times A B}{L I^2}$ . Secundi termini

$$\frac{1}{2} S I^2 \times \frac{d x}{L A + x}, \text{ fluens est area hyperbolæ quæ itâ describitur. Ad puncta L, A, B, (vid.$$

fig. exempli 2<sup>1</sup>.) erige perpendicula L l, A a, B b, et asymptotis L l, L B, describe Hyperbolam æquilateram cuius sit dignitas  $\frac{1}{2} S I^2$ , et quoniam est (Theor. 4. Hyp.)  $L D \times D F = \frac{1}{2} S I^2$  idèoque  $D F = \frac{1}{2} \frac{S I^2}{L D}$ , erit  $D F \times D d =$

$\frac{1}{2} \frac{S I^2 \times d x}{L A + x}$  positâ A D = x. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis est fluenti secundi termini ubi A D = A B. Hæc igitur area subducta de rectangulo  $\frac{1}{2} \frac{S I^2 \times S I^2 \times A B}{L I^2}$  relinquet aream quæsitam A N B.

tiones in I et P a sphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia S P ad sphæræ semidiametrum S A : si vires illæ sunt reciprocè in triplicatâ ratione distantiarum, attractiones in I et P erunt ad invicem ut S P quad. ad S A quad. : Si in quadruplicatâ, ut S P cub. ad S A cub. Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut P S cub.  $\times$  P I, attractio in I erit reciprocè ut S A cub.  $\times$  P I, id est (ob datum S A cub.) reciprocè ut P I. <sup>(q)</sup> Et similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, et existente corpusculo in loco quovis P, <sup>(r)</sup> ordinatim applicata D N inventa fuit ut  $\frac{D E q \times P S}{P E \times V}$ . Ergo si

agatur I E, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, <sup>(s)</sup> mutatis mutandis, evadet ut  $\frac{D E q \times I S}{I E \times V}$ . Pone vires centripetas, e sphæræ

puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiiis I E, P E, ut P E<sup>n</sup> ad I E<sup>n</sup> (ubi numerus n designet indicem potestatum P E et I E) <sup>(t)</sup> et

ordinatæ illæ fient ut  $\frac{D E q \times P S}{P E \times P E^n}$  et  $\frac{D E q \times I S}{I E \times I E^n}$ , quarum ratio ad

invicem est ut P S  $\times$  I E  $\times$  I E<sup>n</sup> ad I S  $\times$  P E  $\times$  P E<sup>n</sup>. Quoniam ob continuè proportionales S I, S E, S P, <sup>(u)</sup> similia sunt triângula S P E, S E I, et inde fit I E ad P E ut I S ad S E vel S A; pro ratione I E ad P E scribe rationem I S ad S A; et ordinarum ratio evadet P S  $\times$  I E<sup>n</sup> ad S A  $\times$  P E<sup>n</sup>. <sup>(x)</sup> Sed P S ad S A subduplicata est ratio dis-

<sup>(q)</sup> \* *Similis est progressus in infinitum.* Vi-  
res centripetæ acceleratrices a particulâ aliquâ in  
centro positâ oriundæ, sint inter se in distantiiis  
I S, P S reciprocè ut harum distantiarum po-  
testates I S<sup>n</sup>, P S<sup>n</sup>, et vis quâ corpusculum si-  
tum in I trahitur a sphærâ totâ, erit ad vim quâ  
trahitur in loco P ut I S <sup>$\frac{1}{2}$</sup>  ad P S <sup>$\frac{1}{2}$</sup>  et P S <sup>$\frac{n-1}{2}$</sup>   
ad I S <sup>$\frac{n-1}{2}$</sup>  conjunctim, hoc est, ut P S  $\frac{n-1}{2}$  ad  
I S  $\frac{n-2}{2}$ . Quare cum sit, (ex Hyp.) P S :

A S = A S : S I, adeoque I S =  $\frac{A S^2}{P S}$ , et

I S  $\frac{n-1}{2}$  =  $\frac{A S^{n-1}}{P S^{n-1}}$ , vires illæ erunt ad

P S  $\frac{2}{n-1}$

invicem ut P S  $\frac{n-1}{2}$  ad  $\frac{A S^{n-1}}{P S^{n-1}}$ , seu ut

P S  $\frac{2}{n-1}$

P S<sup>n-1</sup> ad A S<sup>n-1</sup>. Hinc si n = 1, vires erunt in ratione æqualitatis, si n = 2, erunt ut P S ad A S; Si n = 3 ut P S<sup>2</sup> ad A S<sup>2</sup>, si n = 4 ut P S<sup>3</sup> ad A S<sup>3</sup>, et ita porro in infinitum.

<sup>(r)</sup> \* *Ordinatim applicata D N inventa fuit,* &c. (Cor. 4. Prop. 80.)

<sup>(s)</sup> \* *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I sito, radio I E, describendus arcus circuli, et in formulâ attractionis  $\frac{D E^2 \times P S}{P E \times V}$ , loco P S

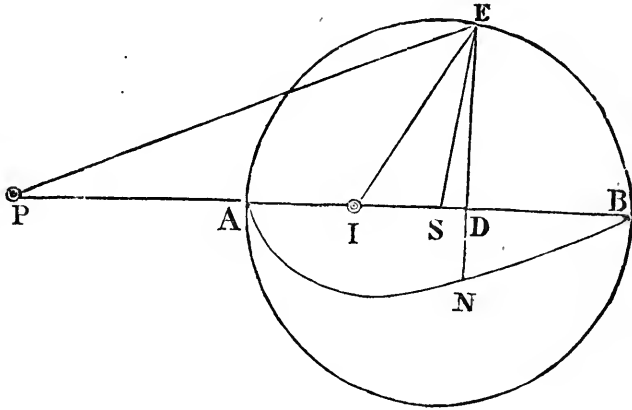
et P E, scribe I S, et I E.

<sup>(t)</sup> \* *Et ordinatæ illæ,* &c. Si loco V scribantur P E<sup>n</sup>, et I E<sup>n</sup>, quæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P et I, (per Cor. 4. Prop. 80.)

<sup>(u)</sup> \* *Similia sunt triângula S P E, S E I,* per Prop. 6. Lib. 6. Elem.

<sup>(x)</sup> \* *Sed P S ad S A subduplicata est ratio distantiarum P S, S I,* ob continuè proportionales P S, S A, S I. Porro vires in distantiiis P S, I S, sunt ad invicem ut I S<sup>n</sup>, ad P S<sup>n</sup>

tantiarum  $P S, S I$ ; et  $I E^n$  ad  $P E^n$  (ob proportionales  $I E$  ad  $P E$  ut  $I S$  ad  $S A$ ) subduplicata est ratio virium in distantiiis  $P S, I S$ . Ergo



ordinatæ, et propterea areae quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis illis rationibus. Q. e. d.

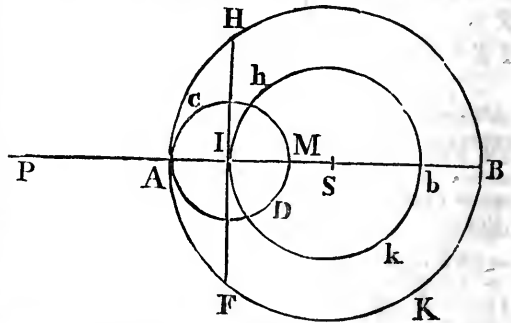
(ex Hyp.) et  $I S : P S = I S^2 : A S^2 = I E^2 : P E^2$ , (ob proportionales  $I E : P E = I S : A S$ ), atque adeo  $I S^n : P S^n =$

sphærâ interiore  $I h b k$  versùs centrum  $S$  trahitur, infinita est (520. 527) respectu vis illius quâ extrâ contactum traheretur. Sed vis quâ a

$I E^{2^n} : P E^{2^n}$ , et  $I S^{\frac{n}{2}} P S^{\frac{n}{2}} = I E^n : P E^n$ . Quare  $I E^n$  est ad  $P E^n$  in ratione subduplicatâ virium in distantiiis  $P S, I S$ , et ordinatarum ratio  $P S \times I E^n$ , ad  $S A \times P E^n$  æqualis est rationi  $P S^{\frac{1}{2}} \times I S^{\frac{n}{2}}$ , ad  $I S^{\frac{1}{2}} \times P S^{\frac{n}{2}}$ .

534. Scholium. Iisdem positis quæ in Prop. 82. si centro  $I$  radio  $I A$  sphæra  $A C M D$  descripta sit, vis quâ corpusculum in  $I$  situm a totâ sphærâ majore  $A H B K$  versùs centrum  $S$  trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphæra minore  $A C M D$  traheretur. Nam corpusculum in centro  $I$  sphæræ  $A C M D$  positum, æqualiter undiquè ab hujus sphæræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 1. Si centro  $S$  radio  $S I$  descripta sit sphæra  $I h b k$ , et vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum a particulis materiæ trahentibus, corpusculum in  $I$  situm seu in contactu sphæræ cavæ  $A I H B K I$ , subductâ sphærâ interiore  $I h b k$ , vi infinitâ retrahitur a centro  $S$  versùs  $A$ . Nam vis quâ corpusculum in contactu  $I a$



sphærâ totâ solidâ  $A H B K S$ , versùs idem centrum  $S$  trahitur finita est, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpusculum in loco  $P$  urgeretur (Prop. 82.) ergò vis quâ a sphærâ cavâ  $A I H B K I$ , retrahitur a centro versùs  $A$  infinita est; vis enim quâ in centrum  $S$ , a sphærâ solidâ  $A H B K S$  in centrum trahitur, æqualis est vi sphæræ interioris  $I h b k s$ , demptâ vi contrariâ sphæræ cavæ  $A I H B K I$ .

536. Cor. 2. Ductâ per  $I$  rectâ  $H F$  ad  $A B$



## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

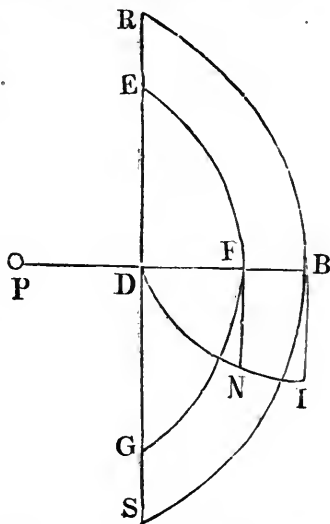
*Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.*

Si P corpus in centro sphaeræ, et R B S D segmentum ejus plano R D S et superficie sphaericâ R B S contentum. Superficie sphaericâ E F G centro P descriptâ secetur D B in F, ac distinguatur segmentum in partes B R E F G S, F E D G. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, et erit hæc superficies (per <sup>(y)</sup> demonstrata Archimedis) ut  $P F \times D F \times O$ . Ponamus præterea vires attractivas particularum sphaeræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n; et vis, quâ superficies E F G trahit corpus P,

erit (per Prop. LXXIX.) ut  $\frac{D E q \times O}{P F^n}$ ,

id (<sup>(z)</sup>) est, ut  $\frac{2 D F \times O}{P F^{n-1}} - \frac{D F q \times O}{P F^n}$ .

Huic proportionale sit perpendicularum F N ductum in O; et (<sup>(a)</sup>) area curvilinea B D I, quam ordinatim applicata F N in longitudinem D B per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum R B S D trahit corpus P. Q. e. i.



perpendiculari et sphaeræ occurrente in H et F vis quâ sphaeræ segmentum A H F corpusculum in contactu, I situm versus A trahit, est etiam infinita in eâdem virium hypothesis. Nam partes omnes segmenti cavi I H b B K F I, corpus in I positum ad centrum S trahunt, idè quæ a solo segmento A H F a centro versus A retrahitur, sed vi infinità a centro retrahitur 535. Ergo, &c.

(<sup>(y)</sup>) \* Per demonstrata Archimedis. Nam (515) elementum superficiei E F G, est ut P F ducta in elementum lineæ D F, adeoque ob datam P F, respectu superficiei totius E F G, superficies illa (165) erit ut  $P F \times D F$ , et proindè lamina ex hac superficie et profunditate O, genita erit ut  $P F \times D F \times O$ .

VOL. I.

(<sup>(z)</sup>) \* Id est, &c. Nam (per Prop. 15. Lib. 6. Elem.)  $D E^2 = 2 P F - D F \times D F$   
 $= 2 P F \times D F - D F^2$ . Quare  $\frac{D E^2 \times O}{P F^n}$   
 $= \frac{2 D F \times O}{P F^{n-1}} - \frac{D F^2 \times O}{P F^n}$ .

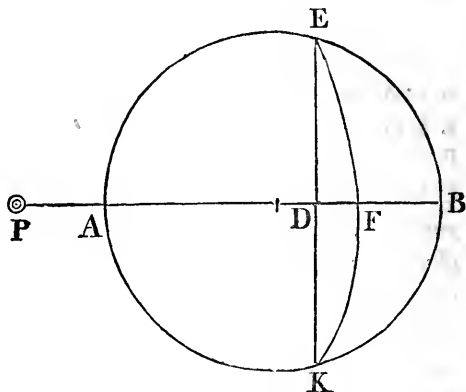
(<sup>(a)</sup>) 537. \* Et area curvilinea, &c. Si segmentum R B S D R, in laminas innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, et capiatur semper perpendicularum F N, vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum  $F N \times O$ , seu aream curvilineam D N I B, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur P D = a, P F = x, D F = x - a, et crit

B b

## PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

*Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphaeræ in axe segmenti cuiusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.*

A segmento E B K trahatur corpus P in ejus axe A D B locatum. Centro P intervallo P E describatur superficies sphaerica E F K, quâ distinguatur segmentum in partes duas E B K F E et E F K D E. (b) Quærat vis partis prioris per Prop. LXXXI. et vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; et summa virium erit vis segmenti totius E B K D E. Q. e. i.

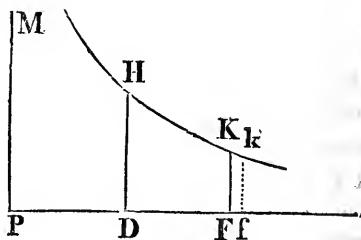


$$\begin{aligned} & \text{laminae sphaericae E F G vis attractiva ut} \\ & \frac{2x dx - 2a dx}{x^n - 1} - \frac{xx dx - 2ax dx + a dx}{x^n} \\ & = \frac{dx}{x^n - 2} - \frac{a dx}{x^n} = x^{2-n} dx - \\ & a a x^{-n} dx, \text{ cujus fluens} = \frac{x^{3-n}}{3-n} - \\ & \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + Q \text{ const. Sed posita } x = a, \\ & \text{segmentum et vis illius evanescunt, ergò erit } Q \\ & = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{1}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}, \\ & \text{et fluens accurata} = \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + \\ & \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}. \end{aligned}$$

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, a segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1º. casu area D N I, fluxio erit  $x dx - \frac{a a dx}{x}$ . Primi termini flu-

ens est  $\frac{1}{2} x x + Q$ , quæ evanescere debet posità  $x = a$ , quare erit  $Q = -\frac{1}{2} a a$ , et fluens accurata  $= \frac{1}{2} x x - \frac{1}{2} a a$ . Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur P M ad P F normalis, et asymptotus P M, P F, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas  $P D^2$ ; per puncta D, F, f erigantur perpendiculara D H, F K, f k hyperbolæ occurrentia in H, K, k, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, et erit area hyperbolica D H K F, æqualis flu-

enti secundi termini; nam (per Theor. 4. de hyperbolâ)  $P D \times D H = P D^2 = P F \times F K$ , et ideò  $F K = \frac{P D^2}{P F}$ , ac  $F K \times F f = \frac{P D^2 \times dx}{x}$  et area D H K F evanescit, ubi P F seu  $x = P D$ .



In 2º. casu area D N I, fluxio est  $\frac{dx}{x} - \frac{a a dx}{x^3}$ . Secundi termini fluens est  $\frac{a a}{2 x x} + Q$  et invenitur  $Q = -\frac{1}{2}$ , posità  $x = a$ , atque adeò fluens accurata, erit  $\frac{a a}{2 x x} - \frac{1}{2}$ . Ponatur  $a = 1$ , et primi termini  $\frac{dx}{x}$ , fluens, erit area hyperbolica D H K F = S.  $\frac{a a dx}{x}$ . Quare area D N I est ut,  $D H K F + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 x x}$ .

(\*) \* Quærat vis partis prioris. 525. 529.

*Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, (c) ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

(c) • *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide *Quæstiones Lib. 4. Optices Newtoni.* 30. *Theoremata ad calcem Astronomiæ Clariss. Keillii, Physicam Clariss s' Gravesandii,*

*Dissertationem Clariss. De Maupertuis in Commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clarè exponit.*

## SECTIO XIII.

*De corporum non sphaëricorum viribus attractivis.*

## PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

*Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem : vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum a particulis.*

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum a particulis ; attractio versus corpus sphaëricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiae attracti corporis a centro sphaërae, haud sensibiliter augebitur ex contactu ; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphaëris attractivis. <sup>(d)</sup> Et par est ratio orbium sphaëricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphaëris misce orbibusque sphaëricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, et partes novæ ubivis addantur : mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. e. d.

## PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

*Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum a particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quam cum trahens et attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.*

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi sphaeram

<sup>(d)</sup> \* Et par est ratio orbium sphaëricorum concavorum. (Per Prop. 71.)

trahentem <sup>(e)</sup> augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa et Theorema XLI. inter se collata, <sup>(f)</sup> facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed et addendo vel auferendo his sphaeris et orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. e. d.

## PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

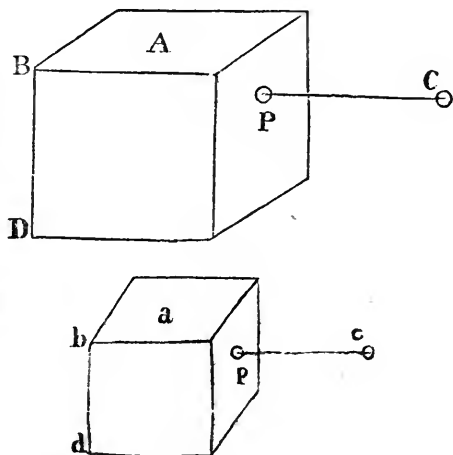
*Si corpora duo sibi invicem similia, et ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, et in totis similiter positas.*

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, et in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; et componendo, ita attractio in totum primum corpus <sup>(g)</sup> ad attractionem in totum secundum. Q. e. d.

<sup>(e)</sup> \* Augeri in infinitum constat, &c. (521. 527. 531.)

<sup>(f)</sup> \* Facile colligitur de attractionibus, &c. 528. 530. 532. 535. 536.

<sup>(g)</sup> 539. \* Ad attractionem in totum secundum. Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita, sintque P, p particulae totis A, a, proportionales et in totis similiter sitæ et attractio decreseat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut  $P \times p c^n$ , ad  $p \times P C^n$ . Unde si corpora A et a in particulas innumeras ut P et p divisa intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut  $P \times p c^n$  ad  $p \times P C^n$ , quod particulae omnes P, p sint ubique totis similes et in iis similiter sitæ, et distantiae earum a corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiiis

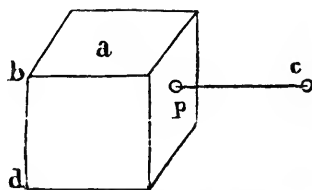
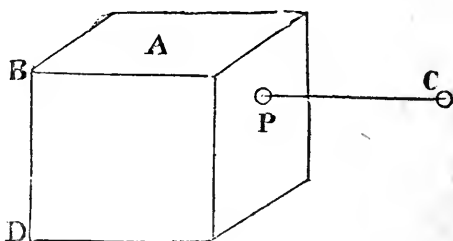


*Corol. 1.* Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, et distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut A cub. et B cub. ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiae a corporibus, ut A et B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$  et  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$ , id est, ut corporum latera illa cubica A et B. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$  et  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$ , id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut  $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ q. q.}}$  et  $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ q. q.}}$ , id est, reciprocè ut latera cubica A et B. Et sic in cæteris.

*Corol. 2.* <sup>(h)</sup> Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt

P C, p c. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, et distantiae p c, P C sint lateribus homologis b d, B D proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut  $A \times p c^n$  ad  $a \times P C^n$ , atque etiam ut  $A \times b d^n$  ad  $a \times B D^n$ , et ut  $B D^3 \times b d^n$  ad  $b d^3 \times B D^n$ , hoc est, ut  $b d^n - 3$  ad  $B D^n - 3$ , ob proportionales  $A : a = B D^3 : b d^3$ , (per Hyp.) ex quibus patet Corollarium 1<sup>um</sup>. quod sequitur; Nam si  $n = 2$ , erunt attractiones ut B D ad b d; si  $n = 3$ , erunt æquales; si,  $n = 4$ , erunt ut b d, ad B D, hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

<sup>(h)</sup> 540. \* Undè vicissim, &c. Nam si experimentis inventum sit attractionem corpusculi C in corpus A, esse ad attractionem corpusculi c, in corpus a, ut est B D ad b d, vel ut 1 ad 1, vel ut b d ab B D, vires particularum attractivarum decrescunt in ratione distantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, si experimentis inventa fuerit attractio corpusculi C in A ad attractionem corpusculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti decrescere in ratione dignitatis distantiarum cujus sit index x crit (539)  $n : N = B D^x - 3 : b d^x - 3$ , adeo-



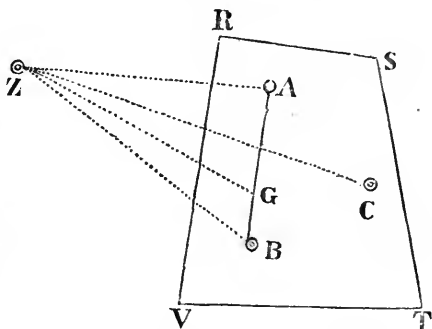
que (si L logarithmum significet quantitatis cui præponitur) crit  $L. \frac{n}{N} = L. \frac{B D^x - 3}{b d^x - 3}$   
 $= x - 3 \times L. \frac{B D}{b d}$ . Quare erit  $x \times$   
 $L. \frac{B D}{b d} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{B D}{b d}$ , et  $x =$

corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

## PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

*Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantie locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; et eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili et æquali constantis, et centrum habentis in ejus centro gravitatis.*

Corporis R S T V particulæ A, B trahant corpusculum aliquod Z viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantie A Z, B Z; sin particulæ statuatur inæquales, sint ut hæ particulæ et ipsarum distantie A Z, B Z conjunctim, sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas A Z, B Z respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa  $A \times A Z$  et  $B \times B Z$ . Jungatur A B, et secetur ea in G ut sit A G ad B G ut particula B ad particulam A; et erit G commune centrum gravitatis particularum A et B. Vis  $A \times A Z$  (per legem Corol. 2.) resolvitur in vires  $A \times G Z$  et  $A \times A G$ , et vis  $B \times B Z$  in vires  $B \times G Z$  et  $B \times B G$ . Vires autem  $A \times A G$  et  $B \times B G$ , ob proportionales A ad B et B G ad A G, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires  $A \times G Z$  et  $B \times G Z$ . Tendunt hæ ab Z versus centrum G, et vim  $\overline{A + B} \times G Z$  component;



$L. \frac{n}{\frac{B D}{b d}} + 3$ . Invenietur itaque dignitatis in-

dex  $x$ , per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si  $\frac{n}{N} = \frac{b d}{B D}$ , erit  $L. \frac{b d}{B D} = -$

$L. \frac{B D}{b d}$ , et ideo  $x = -1 + 3 = 2$ . Si  $\frac{n}{N}$

$= 1$ , erit  $L. \frac{n}{N} = 0$ , et proinde  $x = 3$ . Si

$\frac{n}{N} = 4$ , erit  $x = 4$ , prorsus ut supra. Si

$\frac{n}{N} = \frac{B D}{b d^p}$ , erit  $L. \frac{n}{N} = p \times L. \frac{B D}{b d}$ , et  $x$

$= p + 3$ . Sed si  $\frac{n}{N} = \frac{b d^p}{B D^p}$ , invenie-

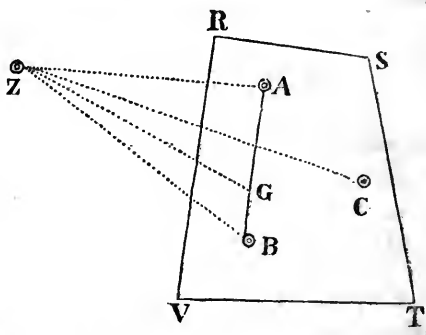
tur  $x = 3 - p$ . Si  $\frac{n}{N} = \frac{B D}{b d}$ , erit  $x =$

$L. \frac{n}{N} + 3 = L. \frac{n}{N} + 3$ .

$L. \frac{n}{1.0000000} + 3 = L. \frac{n}{N} + 3$ .

hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A et B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, et componatur hujus vis cum vi  $A + B \times GZ$  tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G et particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; et eadem erit, ac si globus et particula C consisterent in centro



illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque R S T V, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, <sup>(1)</sup> figuram globi indueret. Q. e. d.

*Corol.* Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens R S T V esset sphæricum: et propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum <sup>(2)</sup> movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

## PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

*Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantie locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; et eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent et in globum formarentur.*

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

*Corol.* Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent et in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

<sup>(1)</sup> \* Figuram globi indueret. Per Prop. 77.

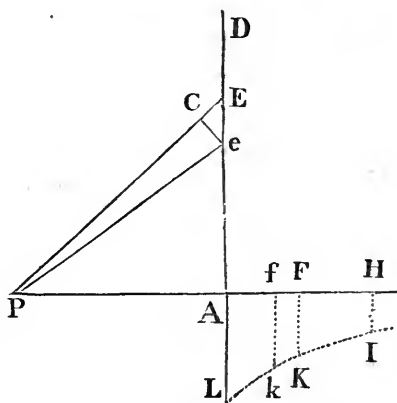
<sup>(2)</sup> \* Movebitur in ellipsi, &c. Per Cor. Prop. 78. et per Cor. 1. Prop. 10.



## PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

*Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.*

Centro A intervallo quovis A D, in plano, cui recta A P perpendicularis est, describi intelligatur circulus; et invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attrahitum P agatur recta P E. In rectâ P A capiatur P F ipsi P E æqualis, et erigatur normalis F K, quæ sit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P. Sitque I K L curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In P A capiatur P H æqualis P D, et erigatur perpendiculum H I curvæ prædictæ occurrens in I; et erit corpusculi P attractio in circulum ut area A H I L ducta in altitudinem A P. Q. e. i.



Etenim in A E capiatur linea quam minima E e. Jungatur P e et in P E, P A capiantur P C, P f ipsi P e æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro A intervallo A E in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut F K, et inde vis quâ punctum illud trahit corpus P versus A, <sup>(1)</sup> est ut  $\frac{A P \times F K}{P E}$ , et vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus et  $\frac{A P \times F K}{P E}$  conjunctim; <sup>(m)</sup> annulus autem iste est ut rectangulum sub radio A E et latitudine

<sup>(1)</sup> \* Est ut  $\frac{A P \times F K}{P E}$ , per Leg. Cor. 2.

<sup>(m)</sup> \* Annulus autem iste, &c. Nam annulus E Z X e, æqualis est differentie



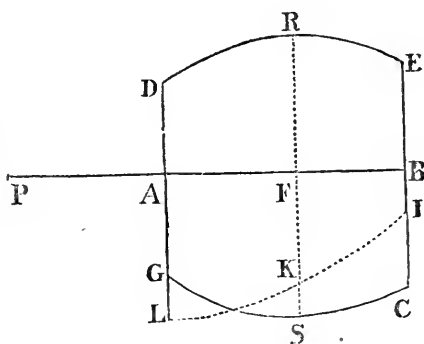
(<sup>9</sup>) ideoque area A H I K L ut  $\frac{1}{P A^{n-1}} - \frac{1}{P H^{n-1}}$ ; erit attractio corpusculi P in circulum ut  $\frac{1}{P A^{n-2}} - \frac{P A}{P H^{n-1}}$ .

*Corol.* 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, et numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprochè ut  $P A^{n-2}$ , propterea quod (<sup>r</sup>) terminus alter  $\frac{P A}{P H^{n-1}}$  evanescet.

## PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

*Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.*

(<sup>1</sup>) In solidum D E C G trahatur corpusculum P, situm in ejus axe A B. Circulo quolibet R F S ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, et in ejus semidiametro F S, in plano aliquo P A L K B per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo F K vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam L K I, planis extimorum circulorum A L et B I occurrentem in L et I; et erit attractio corpusculi P in solidum (<sup>t</sup>) ut area L A B I. Q. e. i.



(<sup>9</sup>) \* *Ideòque area, &c.* Si enim D dicatur x, erit  $P K \propto F f$  ut  $\frac{d x}{x^n}$ , (ex Hyp.) et (165) area

A F K L, ut  $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q$ . const.

posità x seu P F = P A, invenitur Q =  $\frac{1}{(n-1)P A^{n-1}}$ , ideòque area A F K L, ut

$\frac{1}{(n-1)P A^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$  hoc

est, ob datam quantitatem n - 1, ut  $\frac{1}{P A^{n-1}}$

$-\frac{1}{P H^{n-1}}$  ubi P F = P H.

(<sup>r</sup>) \* *Terminus alter evanescet.* Ob P H, infinitum.

(<sup>5</sup>) \* *In solidum D E C G, &c.* Convolutione superficii A D R E B circa axem A B genitum.

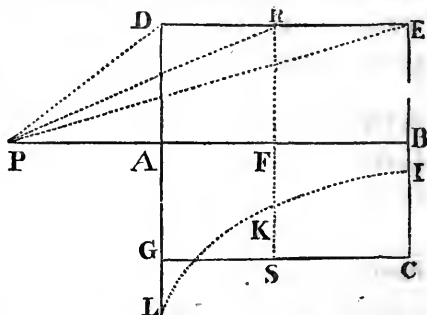
(<sup>t</sup>) \* *Ut area L A B I.* Patet per Cor. Lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ A B describi possunt.

541. *Scholium.* Sit abscissa P F = x, ejus fluxio d x, ordinatim applicata F R = y, P R =  $\sqrt{y y + x x}$ , et vis reciprochè ut distantie dignitas cujus index n, erit F K ut  $\frac{1}{P F^{n-2}}$

*Corol. 1.* Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo  $ADEB$  circa axem  $AB$  revolutò descriptus, et vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproçè ut quadrata distantiarum a punctis: <sup>(u)</sup> erit attractio corpusculi  $P$  in hunc cylindrum ut  $AB - PE + PD$ . Nam ordinatim applicata  $FK$  (per *Corol. 1. Prop. XC.*) erit ut

$$1 - \frac{PF}{PR}.$$

Hujus pars 1 ducta in longitudinem  $AB$ , describit aream  $1 \times AB$ : et pars altera  $\frac{PF}{PR}$  ducta in longitudinem  $PB$ ,



describit aream 1 in  $PE - AD$ , id quod ex curvæ  $LKI$  quadraturâ facilè ostendi potest; et similiter pars eadem ducta in longitudinem  $PA$  describit aream 1 in  $PD - AD$ , ductaque in ipsarum  $PB$ ,  $PA$  differentiam  $AB$  describit arearum differentiam 1 in  $PE - PD$ . De contento primo  $1 \times AB$  auferatur contentum postremum 1 in  $PE - PD$ , et restabit, area  $LABI$  æqualis 1 in  $AB - PE + PD$ . Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut  $AB - PE + PD$ .

*Corol. 2.* Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois  $AGBC$  attrahit corpus quodvis  $P$ , exterius in axe suo  $AB$  situm. <sup>(x)</sup> Sit  $NKRM$

$$-\frac{PF}{PR^n - 1} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(y + x)^{\frac{n-1}{2}}}$$

(per *Cor. 2. Prop. 90.*) Quare areæ  $AFKL$

fluxio erit ut  $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{xdx}{(y + x)^{\frac{n-1}{2}}}$ , et hujus fluens ut vis quâ corpusculum  $P$  in solidum  $DRSG$  trahitur. Datâ verò curvæ  $DRE$  naturâ, inveniendus est valor ordinatæ  $y$  per abscissam  $x$ , et inde fluens determinanda.

<sup>(u)</sup> • Erit attractio corpusculi  $P$ , &c. Si ordinatim applicata  $FR$ , dicatur  $b$ , patet (429) areæ  $AFKL$ , elementum fore ut  $dx - \frac{xdx}{(b + x)^{\frac{1}{2}}}$ . Fiat  $b + x = z$ , et erit

$xdx = zdz$ , et proinde elementum prædictum ut  $dx - dz$ . Quare  $AFKL$  erit ut  $x - z + Q$ , et quoniam hæc area evanescit, ubi  $PF$ , seu  $x = PA$ , et  $PR$  seu  $z = PD$ , erit  $Q = PD - PA$ , et arca  $AFKL$ , seu attractio corpusculi  $P$ , in cylindrum  $DRSG$ , ut  $PF - PR + PD - PA = AF - PR + PD = AB - PE + PD$ , ubi fit  $PF = PB$ , et  $PR = PE$ .

<sup>(x)</sup> 542. Sit  $NKRM$  sectio conica cujus ordinatim applicata  $ER$  æquatur semper longitu-

dini  $PD$ , &c. Sit  $AP = a$ , curvæ datæ  $ACB$  cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis  $AS = b$ , alter semiaxis  $SC = c$ ,  $AE = x$ , erit  $PE = a + x$ , et (ex naturâ ellipseos) erit  $ED^2 = \frac{cc}{bb} \times 2bx - xx$ ;

unde quadratum  $ER$  ordinatæ ad curvam  $NKRM$  sive  $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb} xx$ ; cum ergo hæc æquatio ad curvam  $NKRM$ , ultra secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem ellipsis si quantitas  $xx - \frac{cc}{bb} xx$  sit negativa, quod evenit ubi  $SC$  (sive  $c$ ) major est quam  $AS$  (sive  $b$ ); Erit verò parabola si ea quantitas evanescat, idèque si  $c = b$  quod evenit ubi curva  $ACB$  est circulus; Denique erit hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si  $AS$  sit longior axis.

543. Sit  $ACB$  ellipsis cujus axis  $CS$  sit major axi  $AS$ , quo casu curva  $NKRM$  erit ellipsis, hac ratione ejus curvæ  $NKRM$  determinabuntur axes et vertex. Dicatur ejus ellip-

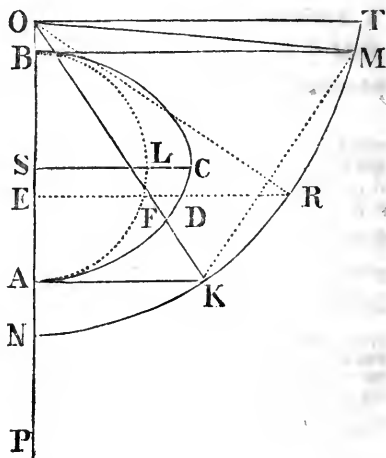


nica occurrentia in K et M; et jungatur K M auferens ab eâdem segmentum K M R K. Sit autem sphæroidis centrum S et semidiameter

quam esse æqualem quantitati  $\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$  ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est  $s s = \frac{b b t^2}{c^2 - b^2}$  ex tertiâ æquatione, unde erit  $s^2 + t^2 = \frac{b^2 t^2 + c^2 t^2 - b^2 t^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 - b^2}$ , ideoque  $\frac{s^2 + t^2}{t^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$ . Est verò  $AO = s - p$ , et  $PO = PA + AO = a + s - p$ , et cum sit  $s - p = \frac{c c - b b}{c c - b b} \times \frac{b a + c c}{c c - b b}$  (ex secundâ æquatione) est  $PO = a + \frac{b}{c c - b b} \times b a + c c$ , quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est  $PO = \frac{c c}{c^2 - b^2} \times a + b$  sive  $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times PS$ , cumque sit  $t^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$  est  $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$  et  $\frac{PO^2}{t^2} = \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$  Unde tandem est  $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2 - AS^2 + CS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$  sive  $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times (1 - \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2})$  reducendoque ad eundem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus  $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{-AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$  diviso numeratore et denominatore per  $CS^2 - AS^2$ . Est ergo  $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ . Q. e. d.

544. Sit autem curva data A C B circulus, ita ut sphæroidis ejus convolutione genita, sit accurata sphæra, erit curva N K R M parabola, stantibus enim quæ in n°. 542. dicta sunt, erit ut prius  $PE = a + x$ , et ex naturâ circuli  $EP^2 = 2 b x - x x$ , unde erit P F quadratum  $= PE^2 + EF^2 = a^2 + 2 a x + x x + 2 b x - x x = a^2 + 2 a x + 2 b x$ ; cum ergo ordinata E R ad curvam N K R M sumatur æqualis P F, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constan-

tes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est parabolæ proprietas. Dicitur ergo ejus parabolæ latus rectum l, distantia verticis N a vertice A curvæ A C B dicatur p, abscissa N E erit  $p + x$  et ex parabolæ natura



erit ordinatæ E R quadratum  $= l p + l x$  conferatur hic valor cum valore ejusdem  $ER^2$  supra invento  $a^2 + 2 a x + 2 b x$ , termini constantes cum constantibus et qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ æquationes  $l p = a^2$ , et  $l = 2 a + 2 b = 2 P S$ , ideoque  $p = \frac{a^2}{2 P S} = \frac{P A^2}{2 P S}$ ; et cum ex natura parabolæ, sit  $ER^2 = l \times p + x$  erit  $p + x = \frac{ER^2}{2 P S}$ ; Cumque area parabolica inter abscissam, ordinatam, et curvam intercepta sit æqualis duobus tertiis rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area parabolica  $N E R = \frac{2}{3} E R^3 = \frac{ER^3}{2 P S}$  et quoniam, ex constructione, ordinatæ in A et B erectæ sunt æquales P A et P B, erit area parabolica N A K  $= \frac{P A^3}{3 P S}$  et area parabolica N B M  $= \frac{P B^3}{3 P S} = \frac{P A + 2 A S^3}{3 P S}$  et differentia harum arearum

A K R M B respondens axi sphærae A B, erit  $\frac{6 P A^2 \times A S + 12 P A \times A S^2 + 8 A S^3}{3 P S}$ ,

et denique dempto trapezio A K M B, segmentum parabolicum residuum K R M erit æquale



*Corol. 3.* Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento

tillineam  $MRK$ ; triangulum  $MOK$  valet  $\frac{1}{2} PO \times AB$ , nam producat recta  $MK$  per-tinget ad  $P$ , propter  $PA = AK$  et  $PB = BM$ , totum verò triangulum  $OMP = \frac{1}{2} OP \times BM = \frac{1}{2} OP \times PB$ , et triangulum  $OKP = \frac{1}{2} OP \times AK = \frac{1}{2} OP \times AP$ , unde sublato triang.  $OKP$  ex triang.  $OMP$ , remanet triang.  $OMK = \frac{1}{2} OP \times (PB - AP) = \frac{1}{2} OP \times AB$ . Unde tandem fluens quæsita hujus tertii termini est  $\frac{2PO}{t^2} \times \frac{1}{2} OP$

$\times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK = \frac{PO^2}{t^2} \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK$ , quæ detracta ex fluente

terminorum positivorum  $AB \times \frac{s^2 + t^2}{t^2}$  fit

$AB \times \frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} - \frac{2PO}{t^2} \times MRK$ ,

cum ergo sit  $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

et  $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

(543) est fluens quæsita (quia  $AB = 2AS$ )

$\frac{2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ .

Si autem curva  $ACB$  sit circulus, sphærois in sphæram veram mutatur, fit  $CS = AS$  et segmentum

$MRK$  fit  $\frac{2AS^3}{3PS}$  (544) ideòque mutatur hæc for-

mula in istam  $\frac{2AS \times AS^2 - \frac{2PS \times 2AS^3}{3PS}}{PS^2 - AS^2 + AS^2}$ .

$= \frac{2AS^3 - \frac{4}{3}AS^3}{PS^2} = \frac{2AS^3}{3PS^2}$  quæ expri-

met vim sphæræ; itaque divisa expressione vis sphæroidis et vis sphæræ per communem

multiplicatorem 2; erit vis sphæroidis ad vim

sphæræ ut  $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$  ad

$\frac{AS^3}{3PS^2}$ . Q. e. d.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc calculo, sit ut prius  $PA = a$ ,  $AB = 2b$ , abscissa

$AE = x$ ,  $PF = v$ , erit  $PE^2 = a^2 + 2ax + x^2$ , et  $EF^2 = 2bx - x^2$  (ex natura circuli) ideòque  $PF^2 (v) = a^2 + 2ax$

$+ 2bx$ , unde invenitur  $x = \frac{v^2 - a^2}{2(a+b)}$  et

$dx = \frac{2v dv}{2(a+b)} = \frac{v dv}{a+b}$  et  $PE = a + x$

$= \frac{a^2 + 2ab + v^2}{2(a+b)}$  et  $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a+b}$ . Ita-

que, cum fluxio aræ quæ exprimit vim sphæræ

sit per Cor. 1. Prop. XC. ut  $dx = \frac{PE dx}{PF}$ ,

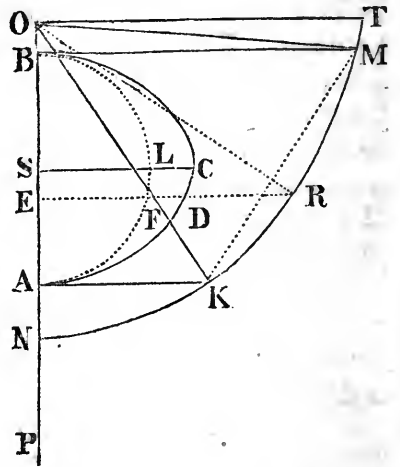
erit ea fluxio ut  $dx = \frac{a^2 + 2ab + v^2}{2(a+b)^2} dv$

cujus fluens est  $x = \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2(a+b)^2}$

$+ Q$  const., quæ evanescere debet ubi  $x = 0$

et  $v = a$ , ideòque est  $Q = \frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2(a+b)^2}$

$+ Q = 0$ , et  $Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2(a+b)^2}$ : vis autem



totius sphæræ obtinetur si fiat  $x = AB (2b)$

et  $v = PB (a + 2b)$ , estque ideò  $2b + \frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a^3 - 4a^2b - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3$

$\frac{2(a+b)^2}{2(a+b)^2} = 2b - \frac{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3}{2(a+b)^2} = 2b \times (1 -$

$\frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{a(a+b)^2})$ , et reducendo ad eundem denominatorem  $= 2b \times$

$\frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2(a+b)^2}$

$= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2(a+b)^2}$  sive ponendo  $AS$  pro  $b$ ,

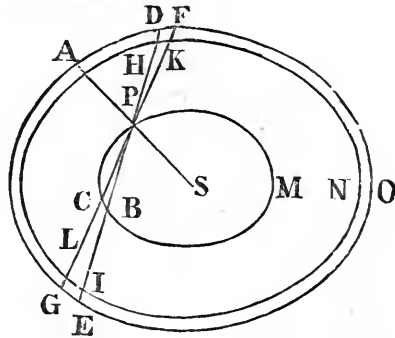
et  $PS$  pro  $a + b$  dividendoque numeratorem

et denominatorem per 2, vis tota sphæræ est

$\frac{2AS^3}{3PS^2}$ . Q. e. i.



colligitur, sive particula in axe sit, sive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit  $A G O F$  sphæroidis attrahens,  $S$  centrum ejus, et  $P$  corpus attractum. Per corpus illud  $P$  agantur tum semidiameter  $S P A$ , tum rectæ duæ quævis  $D E$ ,  $F G$  sphæroidi hinc inde occurrentes in  $D$  et  $E$ ,  $F$  et  $G$ ; sintque  $P C M$ ,  $H L N$  superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium et concentricarum, quarum prior transeat per corpus  $P$ , et secet rectas  $D E$  et  $F G$  in  $B$  et  $C$ , posterior secet easdem rectas in  $H$ ,  $I$  et  $K$ ,  $L$ . Habeant autem sphæroides omnes axem communem, et erunt rectorum partes hinc inde interceptæ  $D P$  et  $B E$ ,  $F P$  et  $C G$ ,  $D H$  et  $I E$ ,  $F K$  et  $L G$  sibi mutuò æquales; (\*) propterea quod rectæ  $D E$ ,  $P B$  et  $H I$  bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ  $F G$ ,  $P C$  et  $K L$ . Concipe jam  $D P F$ ,  $E P G$  designare conos oppositos, angulis verticalibus  $D P F$ ,  $E P G$  infinitè parvis descriptos, et lineas etiam  $D H$ ,  $E I$  infinitè parvas esse; et conorum particule sphæroidum superficiebus abscissæ  $D H K F$ ,  $G L I E$ , ob æqualitatem linearum  $D H$ ,  $E I$ , (z) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpúsculo  $P$ , et propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innu-



(\*) \* *Propterea quod rectæ  $D E$ ,  $P B$ , &c.* Cum enim tres ellipses  $A G O$ ,  $H L N$ ,  $P C M$  similes sint, idemque centrum et axes communes ac proinde communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas  $D E$ ,  $H I$ ,  $P B$  esse in tribus illis ellipsis ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum esse de tribus lineis  $F G$ ,  $K L$ ,  $P C$ . Nam si per punctum  $A$ , in ellipsi  $A G O$  homologum puncto  $P$  in ellipsi  $P C M$  ducta intelligatur recta ipsi  $P B$ , seu  $D E$  parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipseos  $A G O$  diametrum ad quam in ellipsi  $P C M$  ordinata est linea  $P B$ , atque adeo rectæ  $D E$ ,  $P B$  sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ  $D E$ ,  $P B$ , et  $H I$ , bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ  $F G$ ,  $P C$ , et  $K L$  a suâ communi diametro.

(z) \* *Erunt ad invicem, &c.* Si ex punctis  $D$  et  $E$  in lineam  $F G$  demissa intelligantur perpendicularia infinitè parva  $p$ , et  $P$ , hæc, ob angulos  $D P F$ ,  $E P G$ , æquales, erunt ut distan-

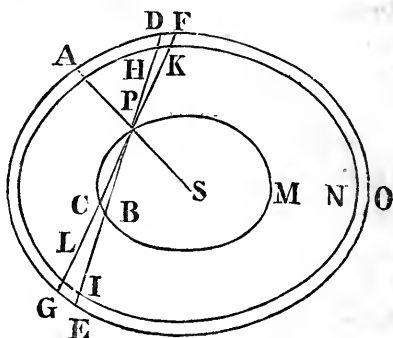
tia  $D P$ ,  $E P$ , Sed quoniam evanescentibus angulis  $D P F$ ,  $E P G$ , lineæ  $D H$ ,  $F K$  et  $G L$ ,  $E I$ , fiunt parallelæ, erit superficies  $D H K F$ , ad superficiem  $G L I E$ , ut rectangulum  $P \times \frac{D H + F K}{2}$ , ad rectangulum  $P \times$

$\frac{G L + E I}{2}$ , hoc est, (ob  $D H + F K =$

$L G + E I$ ) ut  $p$  ad  $P$ , seu ut  $D P$  ad  $E P$ . Quare si  $D P F$ ,  $E P G$  conos vel pyramides in sphæroide  $A G O$  designent, solida  $D H K F$ ,  $G L I E$  erunt ut superficies prædictæ in perpendicularia perpendicularis  $p$ ,  $P$ , similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum  $D P$ ,  $E P$ . Quoniam igitur vis quâ particula solida  $D H K F$  trahit corpusculum  $P$  est ad vim quâ illud trahitur a particula solida  $G L I E$ , ut solidum  $D H K F$  ad solidum  $G L I E$ , hoc est, ut  $\frac{D P^2}{D P^2}$ , ad  $\frac{E P^2}{E P^2}$ , manifestum est corpusculum

$P$  utrinque æqualiter attrahi.

merarum similium concentricarum et axem communem habentium dividantur spatia D P F, E G C B in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conici D P F et segmenti conici E G C B, et per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam P C B M. Trahitur igitur corpus P a sola sphæroide intimâ P C B M, et propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur a sphæroide totâ A G O D, ut distantia P S ad distantiam S. Q. e. d.



## PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

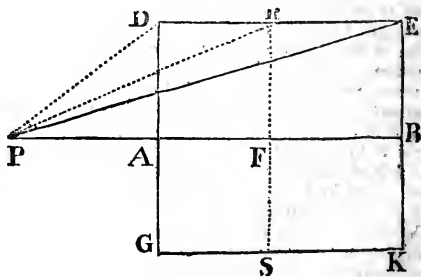
*Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.*

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuius decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. et XCI.) <sup>(a)</sup> inveniri potest. Dein factis experimentis

<sup>(a)</sup> \* *Inveniri potest.* Hoc est per Propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, et lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, et inde habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

*Exemplum.* In cylindrum A D E K G trahatur corpusculum P, situm in ejus axe A B, ut in Prop. XCI.; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciproce ut distantie dignitas cujus index n, et dicatur P A = a, P D = b, P B = c, P E = e, R F = g, P F = x, P R = y, eritque  $y = x x + g g$ , ideoque  $y d y = x d x$ . Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum A D R S G trahitur, erit (541) ut  $\frac{d x}{x^{n-2}} - \frac{x d x}{y^{n-1}} = \frac{d x}{x^{n-2}} - \frac{y d y}{y^{n-1}}$  =  $x^2 - n d x - y^2 - n d y$ ; cujus fluens

$$= \frac{x^3 - n - y^3 - n + Q \text{ const.}}{3 - n}; \text{ hæc autem}$$



$$\text{evanescit, ubi } x = a, \text{ et } y = b; \text{ Quare erit } Q = \frac{b^3 - n - a^3 - n}{b^3 - n - a^3 - n + c^3 - n - e^3 - n} = \frac{c^3 - n - e^3 - n}{3 - n},$$

invenienda est vis attractionis in diversis distantiiis, et lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

## PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

*Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, et vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, et index ternario minor quam index potestatis distantiarum.*

Cas. 1. Sit L G I planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum

ubi  $x = c$ , et  $y = e$ . Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum A D E K G trahitur, experimentis inventa sit ut  $b - a + c - e$ , et habebitur æquatio  $b - a + c - e = \frac{b^3 - n^3 - a^3 - n^3 + c^3 - n^3 - e^3 - n^3}{5 - n}$ ,

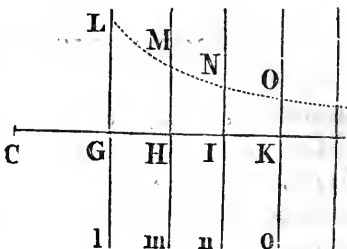
ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito  $n = 2$ , æqualia fiunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciproce ut quadratum distantie a particulâ, quemadmodum in Cor. 1. Prop. 91. positum est. Verum si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur  $3 - n = z$ , et vis corpusculi in cylindrum experimentis repta sit ut quantitas q; et erit  $qz = b^z - a^z + c^z - e^z$ . Fiat  $a^z = p$ ,  $b^z = v$ ,  $c^z = r$ ,  $e^z = s$ , et erit (L significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur)  $L. a^z = L. p$ ,  $L. b^z = L. v$ ,  $L. c^z = L. r$ ,  $L. e^z = L. s$ , adeoque  $z. L. a = L. p$ , et  $z = \frac{L. p}{L. a}$   
 $= \frac{L. v}{L. b} = \frac{L. r}{L. c} = \frac{L. s}{L. e}$ . Unde  $\frac{L. a \times L. v}{L. b} = \frac{L. a}{L. b}$

$= L. p$ , atque adeo  $L. v \frac{L. a}{L. b} = L. p$ , proindeque  $v \frac{L. a}{L. b} = p$ . et simili modo invenietur  $v \frac{L. c}{L. b} = r$ , et  $v \frac{L. e}{L. b} = s$ . Quare æquatio erit  $q. \frac{L. v}{L. b} = v - v \frac{L. a}{L. b} + v \frac{L. c}{L. b} - v \frac{L. e}{L. b}$ ,

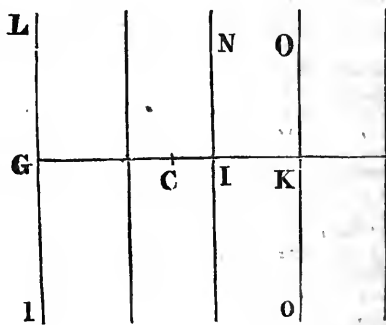
quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam L. v, ponatur  $v = t + 1$ , et (383) erit  $L. v = L. t + 1 = t - \frac{1}{2} t t + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{5} t^5 - \dots$ , &c. in infinitum. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur  $t + 1$ , et loco L. v series  $t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 - \dots$ , &c. obtinebitur æquatio ab exponentibus et logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, et inde reperietur L. v, atque per L. v habebitur valor indicis z, et inde valor ipsius n. Nam cum sit  $z = \frac{L. v}{L. a}$ , et  $L. v = L. t + 1$ , erit  $z = \frac{L. t + 1}{L. a}$ , et  $n = 3 - z = 3 - \frac{L. t + 1}{L. a}$ .

Si in æquatione vel quantitate exponentiali proposita, indeterminata z in solis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas superiori methodo posset ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla esset amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam si  $q = f a^z + g b^z + h c^z + \dots$ , &c., sitque  $v = a^z$  erit  $q = f v + g v \frac{L. a}{L. b} + h v \frac{L. a}{L. c} + \dots$ , &c. erit enim  $z = \frac{L. v}{L. a}$  et  $b^z = b^2 \frac{L. v}{L. a}$  et  $L. b^z = \frac{2 L. v}{L. a} \times L. b = \frac{2 L. b}{L. a} L. v$ , unde est  $b^z = v \frac{L. b}{L. a}$  et sic de cæteris.

autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera m H M, n I N, o K O, &c. ipsi G L parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem C G H I planis illis innumeris perpendicularis, et decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis, quâ planum quodvis m H M trahit punctum C, (b) est reciprocè ut  $CH^{n-2}$ . In plano m H M capiatur longitudo H M ipsi  $CH^{n-2}$  reciprocè proportionalis, et erit vis illa ut H M. Similiter in planis singulis l G L, n I N, o K O, &c. capiantur longitudines G L, I N, K O, &c. ipsis  $CG^{n-2}$ ,  $CI^{n-2}$ ,  $CK^{n-2}$ , &c. reciprocè proportionales; et vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area G L O K in infinitum versus O K producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut  $CG^{n-3}$ , et propterea vis solidi totius est reciprocè ut  $CG^{n-3}$ . Q. e. d.



Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani l G L intra solidum, et capiatur distantia C K æqualis distantiæ C G. Et solidi pars L G l o K O, planis parallelis l G L, o K O terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Pro-



(b) \* Est reciprocè, &c. Sit  $CH = x$ , erit M H ut  $\frac{1}{x^{n-2}}$ , (hyp.) et areæ G L M H, elementum ut  $\frac{dx}{x^{n-2}}$ , adeoque (165) area ipsa ut Q const.  $-\frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$ , quæ evanescit ubi  $x = CG$ , Quare  $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$ ,

et area G L M H, ut  $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$   $-\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ . At cum CH infinita evadit, terminus  $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$  evanescit fitque area infinita G L O K, ut  $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$ , seu ob datam  $n-3$ , ut  $CG^{n-3}$ , reciprocè.

inde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum O K siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut  $CK^n - 3$ , hoc est (ob æquales C G, C K) reciprocè ut  $CG^n - 3$ . Q. e. d.

*Corol. 1.* Hinc si solidum L G I N planis duobus infinitis parallelis L G, I N utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti L G K O vim attractivam partis ulterioris N I K O, in infinitum versus K O productæ.

*Corol. 2.* Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam (d) decrescet quam proximè in ratione potestatis  $CG^n - 3$ .

*Corol. 3.* Et hinc si corpus quodvis finitum et ex unâ parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, et distantia inter corpusculum et planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, et index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis citerioris.

### Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, et ex datâ lege attractionis quærat motus corporis: solvetur problema

(c) \* *Innotescit ejus vis, &c.* Ex demonstrationis attractio solidi totius L G K O, in infinitum versus O producti, est ut  $\frac{1}{CG^n - 3}$

solidi verò infiniti N I K O, ut  $\frac{1}{CI^n - 3}$ .

Quare attractio solidi L G I N, est ut  $\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}$ .

(d) \* *Decrescet quam proximè, &c.* Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut  $\frac{1}{CG^n - 3} - \frac{1}{CI^n - 3}$ ; sed si perexigua

sit distantia C G respectu C I, terminus  $\frac{1}{CI^n - 3}$ ,

minimus erit respectu termini  $\frac{1}{CG^n - 3}$  et

negligi poterit, ideòque attractio erit quam proximè ut  $CG^n - 3$  reciprocè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit  $n = 3$ ; Nam in

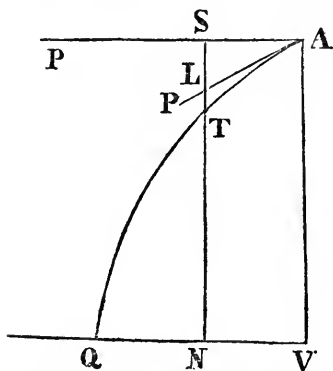
hoc casu  $\frac{1}{CH^n - 2} = \frac{1}{CH}$ , ideoque M H

erit ut  $\frac{1}{CH}$  et rectangulum M H  $\times$  C H da-

tum, proindeque curva L M O hyperbola, cujus asymptotus C K, et area illius finita L M N I G vim exponit solidi L G I N; area verò infinita N O K I, vim solidi infiniti N I K O.

quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ descendentis ad hoc planum, et (per legem Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, <sup>(a)</sup> secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæretur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, <sup>(b)</sup> solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

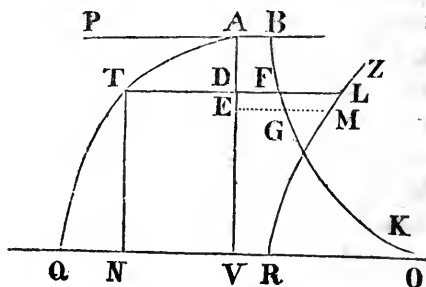
(<sup>a</sup>) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas, &c.* Corpus A quod ad planum V Q perpendiculariter et secundum lineas lineæ A V parallelas trahitur, exeat de loco A juxtâ directionem quamlibet A P. 1<sup>o</sup>. Si projectionis di-



rectio A P plano V Q parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam A S, et per Prop. 39. inveniatur in lineâ S N lineæ A V parallela spatium S T quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, et hinc habebitur punctum T in trajectoryâ A T Q, quam corpus utroque motu, impresso nimirum et ex vi attractrice genito describit. 2<sup>o</sup>. Si directio projectionis A P plano trahenti V Q parallela non est, ductâ A S plano V Q et S L rectæ A V parallelis, motus projectionis A L resolvatur in motus A S et S L, et datis velocitatibus uniformibus A S et S L, dabuntur tum tempus quo percurritur A S, tum spatium S T quod corpus hoc eodem tempore describit ex vi attractrice et motu impresso S L simul (per Cor. 3. Prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoryâ A T Q cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.

*Exemplum.* Exeat corpus de loco A secundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, et ductâ D T eidem plano parallela, sit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciproce. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V et vi trahenti in lineâ D T proportionalis, sitque B F G lineâ curvâ

quam punctum G perpetuò tangit. In D F capiatur D L lateri quadrato areæ A B F D reciproce proportionalis, et punctum L sit semper in lineâ curvâ Z L R, prorsus ut in Prop. 39. Jam dicatur A V = a, D V = x, T D



= y, erit area A B F D ut  $\frac{a a - x x}{x x}$  (430) et

proindè D L, ut  $\frac{x}{\sqrt{a a - x x}}$  adeoque elementum D L M E, ut  $\frac{x dx}{\sqrt{a a - x x}}$ , et area V D L R. ut hujus elementi fluens Q =  $\sqrt{a a - x x}$  (165. 166), evanescit autem area V D L R ubi x = 0. Quare Q = a, et area V D L R, ut a -  $\sqrt{a a - x x}$ . Hinc positâ x = a, erit area V A B Z R, ut a, et area D A B Z L, ut  $\sqrt{a a - x x}$ . Porro si punctum T est in trajectoryâ A T Q erit D T seu y, proportionalis tempori quo uniformiter describitur D T, et quo motu accelerato percurritur A D seu (per Prop. 39.) erit y, ut  $\sqrt{a a - x x}$ , adeoque y y ut a a - x x. Undè patet trajectoryam A T Q esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iisdem positis et vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis V A vertex A.

(<sup>b</sup>) 547. *Solvetur problema, &c.* Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F K, sint P et Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvâ P Q F osculantis in P;

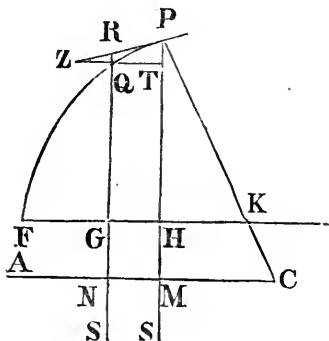
Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem  $A$  in angulo quovis dato ordinatim

applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet  $A^{\frac{m}{n}}$ ; et quærat-  
ur vis quâ corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in ba-  
sem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam or-  
dinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem

augeri parte quam minima O, et ordinatim applicatam  $\overline{A + O}^{\frac{m}{n}}$  resolvo

$$(\dagger) \text{ in seriem infinitam } A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m m - m n}{2 n n} O O$$

P H, Q G perpendiculara ex punctis P, Q in planum F K demissa, C A recta lineæ F K parallela et secans perpendiculara P H, Q G producta in M et N; producatur G Q, ut tangenti



P Z occurrat in R, et per Q agatur recta Z Q T plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob similia triangula C P M, P Z T et R Z Q, est  $C P^2 : P M^2 = P R^2 : Q T^2$ , et ex naturâ circuli osculatoris  $P R^2 = Q R \times R N + Q N$  (per Prop. 36. Lib. 3. Elem.) sive coëuntibus punctis P et Q,  $P R^2 = Q R \times 2 P M$ . Ergo  $C P^2 : P M^2 = Q R \times 2 P M : Q T^2$ , idèquæ  $\frac{Q T^2}{Q R} = \frac{2 P M^3}{C P^2}$ , consideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinitè distans, et erit S P quantitas constans, ac  $\frac{Q T^2 \times S P^2}{Q R} = \frac{2 P M^3 \times S P^2}{C P^2}$ . Est igitur (per Cor. 1. et 5. Prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut  $\frac{2 P M^3 \times S P^2}{C P^2}$ , hoc est, ob constantem quan-

titatem 2 S P<sup>2</sup>, reciprocè ut  $\frac{P M^3}{C P^2}$ , seu in ratione compositâ ex duplicatâ ratione radii osculatoris C P directè et triplicatâ perpendiculâ P M inversè. Porrò datâ curvâ P Q F invenietur in singulis locis radius osculi C P (214) et punctum K ubi plano occurrit ac proinde invenietur P M, per proportionem P K : P H = P C : P M, vel etiam per proportionem P R vel P Q : Q T = P C : P M. Quare dabitur lex vis centripetæ.

(†) 548. *Resolvo in seriem infinitam, &c.* Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum formulis sunt memoriæ revocanda.

*Lemma.* Binomii  $a + b$ , dignitas  $\frac{a+b|^n}{1}$   
 cujus index  $n$ , est  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$   
 $+ \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$   
 $+ \&c.$  Satis patet ex potentialium formatione.  
 Si enim binomium  $a + b$ , ad  $2^{am}$ ,  $3^{am}$ ,  $4^{am}$ ,  
 &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatibus  
 ejusque terminis, index litteræ  $a$  unitate perpetuo  
 decrescit, dum contra index litteræ  $b$  unitate  
 crescit, et coefficientes seu uncia singulorum

terminorum progrediuntur ut numeri  $\frac{n}{1}$ ,  
 $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2}$ ,  $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3}$ ,  
 $\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ , &c.

549. Cor. 1. Si ponatur  $a = P$ , et  $Q = \frac{b}{a}$ , adeoque  $a^n = P^n$ ,  $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$ ,  $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$ ,  $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$ , his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit  $a + b| = P^n + \frac{n}{1} P^{n-1} Q + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^{n-2} Q^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} \times$

$\frac{m-2n}{A^n}$ , &c. atque hujus termino in quo  $O$  duarum est dimensionum, id est, termino  $\frac{m m - m n}{2 n n} O O A \frac{m-2n}{n}$  vim proportionalem esse sup-

$P^n Q^3 +$ , &c. et si rursus ponatur  $P^n = A$ ;  $\frac{n}{1} P^n Q = B$ ;  $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$ ;  $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$ , et ita porro, erit  $\frac{a+b}{1}^n = P + \frac{P Q}{1} + \frac{P^2 Q^2}{2} = P^n + \frac{n}{1} A Q + \frac{n-1}{2} B Q + \frac{n-2}{3} C Q + \frac{n-3}{4} D Q +$ , &c.

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ b. Exempli causâ. Sit trinomium  $d + e + f$  ad tertiam dignitatem elevandum, pone  $n = 3$ ,  $d = a$ ,  $e + f = b$ , et

$$A^p + p A^{p-1} B Z + p A^{p-2} C Z^2$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 B C Z^3$$

$$+ p A^{p-1} D Z^3$$

$$+ p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3$$

551. Cor. 3. Si ex binomio  $a + b$ , extrahenda sit radix cujus index  $\frac{m}{p}$ , loco  $n$ , in formulâ generali scribatur  $\frac{m}{p}$ , et erit  $\frac{a+b}{p} = a^{\frac{m}{p}}$

$$+ \frac{m}{p} \frac{a^{\frac{m-p}{p}} b^1}{a^{\frac{m-p}{p}} b^1} + \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m - p \times m - 2p}{1 \times 2 \times 3 \times p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m - p \times m - 2p \times m - 3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4 +$$

$$\times b^4 +$$
, &c. vel etiam erit  $\frac{a+b}{p} =$

$$\frac{m}{p} \frac{a^{\frac{m-p}{p}}}{p} + \frac{m}{p} \frac{A Q}{p} + \frac{m-p}{2 p}$$

$$B Q + \frac{m-2p}{3 p} C Q + \frac{m-3p}{4 p} D Q +$$

&c.

Nam sit radix quæsita  $\frac{a+b}{p}$  æqualis seriei infinitæ  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$ , &c. erit  $\frac{a+b}{p}$  æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentæ  $\frac{a+b}{p}$  quæ erit  $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$

$\times a^{m-3} b^3$  et conferantur cum terminis dignitatis infinitomii  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3$ ,

formula  $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$ , mutabitur in seriem  $d^3 + 3 d^2 (e + f) + 3 d (e + f)^2 + (e + f)^3$ ; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est  $n - 3$ , abrumptur series ob  $n - 3 = 0$ . Porro per eandem formulam generalem  $(e + f)^2 = e^2 + 2 e f + f^2$ , et  $(e + f)^3 = e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$ . Quare tandem  $(d + e + f)^3 = d^3 + 3 d^2 e + 3 d^2 f + 3 d e^2 + 6 d e f + 3 d f^2 + e^3 + 3 e^2 f + 3 e f^2 + f^3$ .

Ita etiam formulam pro dignitate infinitomii possumus obtinere, sit enim series  $A + B Z + C Z^2 + D Z^3 + E Z^4$ , &c. ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo invenietur.

&c. ad dignitatem p evecti, ( $n^3$ , 550) invenieturque  $A^p = a^m$ ;  $p A^{p-1} B Z = m a^{m-1} b$ ;  $p A^{p-1} C Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$ ;  $p A^{p-1} D Z^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 B C Z^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ , &c.

Unde invenietur  $A = a^{\frac{m}{p}}$ ,  $B Z = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1} b}{a^{\frac{m-p}{p}}} = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$ ;  $C Z^2 = \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} \times \frac{a^{m-2} b^2}{a^{\frac{m-2p}{p}}} = \frac{m-2p}{2 p} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$ , &c.

552. Lemma. Si in rectâ  $A E$  positione datâ, ad quam curva  $Z F H$  refertur, capiatur abscissa quævis  $A B$ , sitque ordinata correspondens  $F B$  æqualis dignitati abscissæ  $A B^q$ , in datam quantitatem  $l$  ductæ, et deinde capiantur intervalla æqualia  $B C$ ,  $C D$ , et agantur ordinatæ  $C G$ ,  $D H$ , ac per punctum  $F$  ducatur tangens  $F I$  ordinatæ  $C G$  occurrens in  $I$ , et recta  $F M$  parallela lineæ  $A E$ , eidem ordinatæ occurrens





pono. (°) Est igitur vis quæsitæ ut  $\frac{m m - m n}{n n} A^{\frac{m-2n}{n}}$ , vel quod perinde est, ut  $\frac{m m - m n}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}}$ . Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente  $m = 2$ , et  $n = 1$ : fiet vis ut data  $2 B^0$ , ideoque

$$\frac{e e}{b} - \frac{e e x}{b^2} + \frac{e e x^2}{b^3} - \frac{e e x^3}{b^4} + \frac{e e x^4}{b^5} \quad \&c. \text{ in infinitum; et } \frac{f f}{x^2} - \frac{x^4}{8 f^3} + \frac{x^6}{16 f^5} \quad \&c. \text{ in infinitum. Nam}$$

$$\text{in hoc casu erit in formulâ } P \frac{m}{p} + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q \quad \&c. (551) m = 1, p = 2, P = f f,$$

$$Q = \frac{x^2}{f f}, A = P \frac{m}{p} = f f \frac{1}{2} = f, B = \frac{m}{p} \times$$

$$A Q = \frac{x^2}{2 f}, \text{ et sic deinceps, ergo erit } y = g + \frac{e e}{b} + f - \frac{e e x}{b} + \left( \frac{e e}{b^3} + \frac{1}{2} f \right) x^2 - \frac{e e x^3}{b^4} + \left( \frac{e e}{b^5} - \frac{1}{8 f^3} \right) x^4 \quad \&c. \text{ in infinitum.}$$

(\*) 557. \* Est igitur vis quæsitæ, &c. Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi tendente ad planum seu basin A F, secundum lineas P B, Q C cum basi A F angulum datum constituentes. Producat ordinatâ C Q ut tangenti per P ductæ occurrat in R, et ex puncto curvæ Q ad ordinatam P B agantur Q L parallela A F, et Q T ad P B perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinite distans tendere, coëuntibus punctis P et Q vis illa in puncto P erit (per Cor. 1. Prop. 6.) directè ut

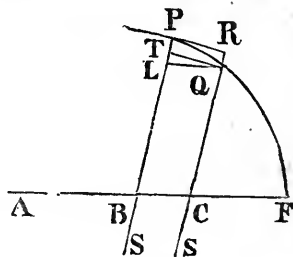
$$\frac{Q R}{S P^2} \times Q T, \text{ hoc est, ob constantem } S P, \text{ ut } \frac{Q R}{Q T}.$$

Porro ob angulum Q L T datum, et angulum Q T L rectum, datur specie triangulum L Q T, et ideò datâ Q L, datur etiam Q T, ergò datâ B C seu Q L, vis erit ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur = A, ordinatâ B P = B, et B C = O; cum sit (ex hyp.) B ut  $\frac{m}{n}$ , erit ordinatâ C Q, ut  $A + O \frac{m}{n}$  et (553), Q R, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur

$$A + O \frac{m}{n}, \text{ hoc est, (550) ut } \frac{m \times m - m n}{1 \times 2 \times n^2} \times \frac{m-2n}{n} \times O O = \frac{m m - m n}{2 n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$$

$$\times O O, \text{ seu ut } \frac{m m - m n}{n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}, \text{ ob}$$

datam quantitatem  $\frac{O O}{2}$ . Est igitur vis quæsitæ ut  $\frac{m m - m n}{1 \times 2 \times n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$  vel ut  $\frac{m m - m n}{n n} \times B^{\frac{m-2n}{m}}$ ; quia cum sit B ut  $A \frac{m}{n}$ , erit  $B \frac{m}{n} \times \frac{m-2n}{n}$ , seu  $B^{\frac{m-2n}{m}}$ , ut A  $\frac{m-2n}{n}$ . Itaque si ponatur  $m = 2$ ,  $n = 1$ :



erit B, ut  $A^2$ , et curva P F parabola, et  $\frac{m m - m n}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}} = 2 B^0$ , adeoque vis ut data  $2 B^0 = 2$ . Quod si ponatur  $m =$

$-1$ , et  $n = 1$ , erit B ut  $\frac{1}{A}$  hoc est  $B \times A$  rectangulum datum, et proinde curva P F hyperbola cujus asymptotus A F, et centrum A;

et  $\frac{m m - m n}{n n} A^{\frac{m-2n}{n}} = 2 A^{-3} = \frac{2}{A^3} = 2 B^3$ , et ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit asymptoto A F, vi illâ corpus a basi A F repellitur.

Si curva P Q F, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter A F = C, erit P B<sup>2</sup> seu B<sup>2</sup>, ut rectangulum A F + A B × B F = C + A × C - A = C C - A A, et ponendo B C = O, erit Q C<sup>2</sup>, ut C C - A A - 2 A O - O O, fiat C C - A A = D D, erit Q C<sup>2</sup>, ut D D - 2 A O - O O, et radice per formulam generalem extractâ (550. 551) erit Q C, ut D -  $\frac{A O}{D} - \frac{O O}{2 D} - \frac{A A O O}{2 D^3} - \frac{A O^3}{2 D^5}$

dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum Galilæus demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente  $m = 0 - 1$ , et  $n = 1$ ; fiet vis ut  $2 A^{-3}$  seu  $2 B^3$ : ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

$$\begin{aligned}
 & - \frac{A^3 O^3}{2 D^5}, \text{ \&c. tertius seriei terminus est } \frac{O O}{2 D} \\
 & + \frac{A A O O}{2 D^3} = \frac{D D + A A \times O O}{2 D^3} = \\
 & \frac{C C O O}{2 D^3}, \text{ erit igitur Q R (552. 556) seu vis ut } \\
 & \frac{C C}{2 D^3}, \text{ hoc est, ob datam quantitatem } \frac{C C}{2}, \text{ ut } \\
 & \frac{1}{D^3}, \text{ ac proindè quoniam B B est ut C C —}
 \end{aligned}$$

$A A$  seu  $D D$ , vis erit ut  $\frac{1}{B^3}$ , hoc est, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis 3. Eodem modo demonstratur vim a plano  $A F$  repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ  $P B$  si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano  $A F$ , altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis  $P B$ ,  $Q C$ , et convexitas plano  $A F$  obversa.

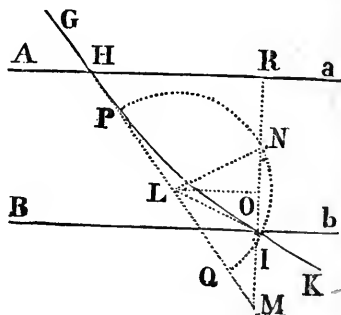
## SECTIO XIV.

*De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.*

## PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

*Si media duo similia, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, et corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.*

*Cas. 1.* Sunto A a, B b plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius A a <sup>(d)</sup> secundum lineam G H, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam H I, <sup>(e)</sup> et emergat secundum lineam I K. Ad planum emergentiæ B b erigatur perpendicularum I M, occurrens tum lineæ incidentiæ G H productæ in M, tum plano incidentiæ A a in R; et linea emergentiæ K I producta occurrat H M in L. Centro L intervallo L I describatur circulus, secans tam H M in P et Q, quam M I productam in N; et primò si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis Galilæi) <sup>(f)</sup> curva



<sup>(d)</sup> 558. \* *Secundum lineam G H.* Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli G H A ad rectum, seu angulus quem linea G H constituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ est etiam angulus K I M, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum

rectâ I M ad planum emergentiæ B b, perpendiculari in I.

<sup>(e)</sup> \* *Et emergat secundum lineam.* Patet rectas G H, I K seu corporis in H et I directiones, curvam H I in punctis H, I contingere.

<sup>(f)</sup> \* *Curva H I parabola,* cujus diameter I R, patet (per not. 40.)

H I parabola <sup>(g)</sup> cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto et lineâ I M æquale sit H M quadrato; sed et linea H M bisecabitur in L. Unde si ad M I demittatur perpendicularum L O, <sup>(h)</sup> æquales erunt M O, O R; et additis <sup>(i)</sup> æqualibus O N, O I, fient totæ æquales M N, I R. Proinde cum I R detur, datur etiam M N; estque rectangulum N M I ad rectangulum sub latere recto et I M, hoc est, ad H M q, in datâ ratione. <sup>(k)</sup> Sed rectangulum N M I æquale est rectangulo P M Q, id est, differentiæ quadratorum M L q, et P L q seu L I q; et H M q datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem M L q: ergo datur ratio M L q — L I q ad M L q, <sup>(l)</sup> et convertendo ratio L I q ad M L q, et ratio dimidiata L I ad M L. Sed in omni triangulo L M I, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ L M R ad sinum anguli emergentiæ L I R. Q. e. d.

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura parallelis pla-

<sup>(g)</sup> \* Cujus hæc est proprietas, &c. Ductis per punctum H diametro H T, et rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum H T ordinatâ I T, erit ob parallelas M I, H T (per Theor. 1. de Parabolâ) et parallelas M H, I T (per Lem. 4. de Conic.) M I = H T et I T = M H (per 34. 1. Elem.); sed (per Theor. 1. de Parabolâ)

et H V parallela L I, erit quoque H L = L M. Q. e. d.

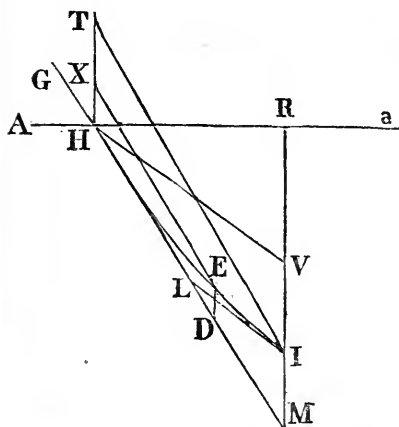
559. Ut latus rectum diametri H T in variis angulis incidentiæ datum sit, oportet corporis parabolam describentis velocitatem in puncto H, et plani incidentiæ A a vim attractricem esse datas. His autem datis, datum esse hoc latus rectum itâ demonstratur. Per punctum X in diametro H T datum, agatur ordinatim applicata X E parabolæ occurrens in E, et per E ducatur E D parallela X H et tangenti H M occurrens in D, ac proinde æqualis datæ X H. Jam verò H X seu D E, est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit H D, ideoque datis vi attractrice et velocitate projectionis, data quoque erit linea H D in quovis incidentiæ angulo G H T. Est autem latus rectum diametri H T tertia proportionalis ad abscissam H X, et ordinatam X E seu H D. Ergo datis vi attractrice et velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri H T. Q. e. d.

<sup>(h)</sup> \* Æquales erunt M O, O R. (Per Prop. 2. lib. 6. Elem.)

<sup>(i)</sup> \* Æqualibus O N, O I. Per Prop. 3. lib. 3. Elem.

<sup>(k)</sup> \* Sed rectangulum N M I æquale est rectangulo P M Q, (per Cor. 1. Prop. 36. lib. 3. Elem.) id est, differentiæ quadratorum M L <sup>2</sup> et P L <sup>2</sup>, est enim P M = M L + P L, et Q M = M L — L Q = M L — P L; Quare P M × Q M = M L <sup>2</sup> — P L <sup>2</sup>. (Per Corol. 6. 23. Elem.)

<sup>(l)</sup> \* Et convertendo. Sint enim A et B, quantitates datæ, et M L <sup>2</sup> — L I <sup>2</sup>; M L <sup>2</sup> = A <sup>2</sup>: B <sup>2</sup>, erit M L <sup>2</sup>: L I <sup>2</sup> = B <sup>2</sup>: P <sup>2</sup> — A <sup>2</sup>, quæ est ratio data

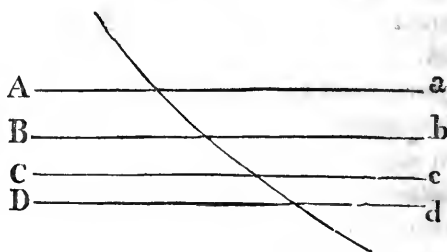


quadratum ordinatæ T I æquale est rectangulo sub dato latere recto diametri H T et abscissâ H T, ergò rectangulum sub dato latere recto et lineâ M I æquale est H M quadrato; Et quoniam H M parabolam tangit in H estque proinde (per Cor. 1. Lem. 5. de Conic.) I M = V I,

nis terminata, A a b B, B b c C, &c. et agitur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; et per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum

A a erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo B b, in datâ ratione; et hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum B b, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio C c, in datâ ratione; et hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano

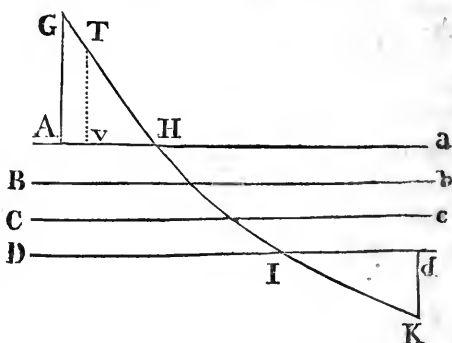
quarto D d, in datâ ratione; et sic in infinitum: <sup>(m)</sup> et ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla et augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; et ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. e. d.



### PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

*Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.*

Capiantur A H, I d æquales, et erigantur perpendiculara A G, d K occurrentia lineis incidentiæ et emergentiæ G H, I K, in G et K. In G H capiatur T H æqualis I K, et ad planum A a demittatur normaliter T v. Et (per legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis A a, B b, C c, &c. perpendi-



<sup>(m)</sup> • *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, sinus emergentiæ ex secundo plano, idem qui sinus incidentiæ in secundum planum

T, et ita porro sinus sint S, T, V, X, &c. ponaturque  $S : T = A : B$ ,  $T : V = B : C$ ,  $V : X = C : D$ , et erit, ex æquo,  $S : X = A : D$ .

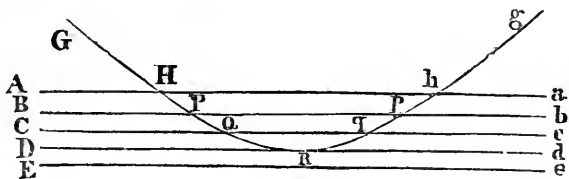
cularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, et propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam  $A G$  et punctum  $H$ , interque punctum  $I$  et lineam  $d K$ ; <sup>(n)</sup> hoc est, æqualibus temporibus describet lineas  $G H$ ,  $I K$ . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut  $G H$  ad  $I K$  vel  $T H$ , <sup>(o)</sup> id est, ut  $A H$  vel  $I d$  ad  $v H$ , hoc est (respectu radii  $T H$  vel  $I K$ ) <sup>(p)</sup> sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. e. d.

## PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

*Iisdem positis, <sup>(q)</sup> et quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, et angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.*

Nam concipe corpus inter parallela plana  $A a$ ,  $B b$ ,  $C c$ , &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi  $H P$ ,  $P Q$ ,  $Q R$ , &c.

Et sit ea lineæ incidentiæ  $G H$  obliquitas ad planum primum  $A a$ , ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione



quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano  $D d$ , in spatium  $D d e E$ : et ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano  $D d$ . Perveniat corpus ad hoc planum in puncto  $R$ ; et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum  $E e$ . Sed nec potest idem per-

<sup>(n)</sup> \* Hoc est, æqualibus temporibus. Quoniam motu composito corpus fertur per lineas  $G H$  et  $I K$ , eodem tempore describit  $G H$  quo  $A H$ , et  $I K$  quo  $I d$ , sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela et æqualia  $A H$ ,  $I d$  æquantur, ergo corpus æqualibus temporibus describit lineas  $G H$  et  $I K$ .

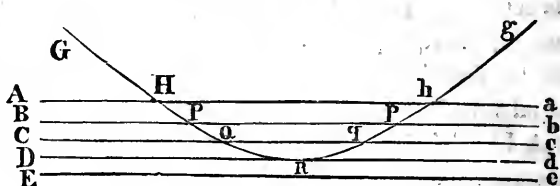
<sup>(o)</sup> \* Id est ut  $A H$  vel  $I d$  ad  $v H$ . Per Prop. 2. lib. 6. Elem.

<sup>(p)</sup> \* Ut sinus emergentiæ. Est enim an-

gulus  $v T H$  anguli  $T H v$ , et angulus  $I K d$  anguli  $K I d$ , complementum ad rectum; et proinde (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

<sup>(q)</sup> \* Et quod motus ante incidentiam, &c. Ut angulus emergentiæ semper crescat (Prop. 95.) et ipsius proinde complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

gere in lineâ emergentiæ R d, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (\*) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana C c, D d, describendo arcum parabolæ Q R q, (†) cujus vertex principalis (juxta demonstrata Galilæi) est in R; secabit planum C c in eodem angulo in q, ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis q p, p h, &c. arcubus prioribus Q P, P H similibus et æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p, h, &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in h, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A a, B b, C c, D d, E e, &c. intervalla in infinitum minui et numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; et angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. e. d.



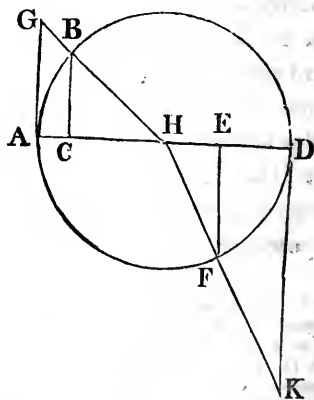
### Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones et refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit Snellius, (†) et per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit

(\*) \* Versus medium incidentiæ, v. gr. C c.

(†) \* Cujus vertex principalis. Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q sunt ad basim Q q perpendiculares, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipsi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per Lem. 4. de Conic.) et propterea velocitates corporis in locis Q et q a vertice R æquè remotis æquales erunt, et directiones illius ad lineam Q q æquè inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium q p, quibus antè decreverat per spatium æquale P Q. Quare corpus pergendo in arcubus parabolicis, &c.

(†) \* Et per consequens. Lucis radius G H incidat in planum refringens A D, sitque radius refractus H K. Centro H et radio quovis H A, circulus describatur planum secans in A et D radiosque lucis in B et F. Erigantur ad planum perpendicularia A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Isaaco Vossio in suâ dissertatione de lucis naturâ et proprietate,

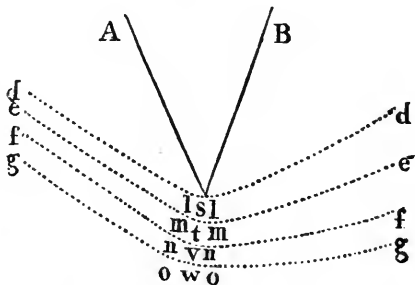


invenerat secantes G H, H K angulorum G H A, K H D, esse in datâ ratione. Verùm indè sequitur quod Cartesius postea vulgavit,



Cartesius. Namque lucem successivè propagari et spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a sole ad terram venire, <sup>(u)</sup> jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum Grimaldus, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissâ, invenit, et ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento et ære cusorum termini rectanguli circulares, et cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; et ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, <sup>(x)</sup> quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; et ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, et tres colorum fascias efformant. In figura designat s aciem cultri vel cunei cujusvis A s B; et g o w o g, f n u n f, e m t m e, d l s l d sunt radii, arcubus o w o, m t m, l s l versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aëre extra cultrum, debebunt etiam

radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aëre quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. <sup>(z)</sup> Fit igitur refraction, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem ra-



datam quoque esse rationem linearum C H, H E quæ sunt sinus angulorum incidentiæ C B H, et emergentiæ H F E (558). Nam B H : G H = C H : A H (seu B H) et K H : F H (seu B H) = H D (seu B H) : H E, et ex æquo, K H : G H = C H : H E. Quare datâ ratione G H ad K H, datur quoque ratio H E ad C H.

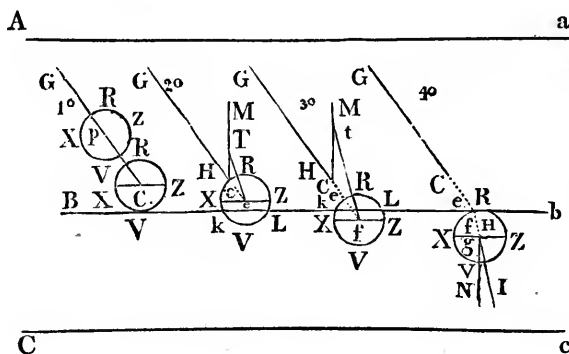
<sup>(u)</sup> \* Jam constat per phænomena. Jupiter cum suis quatuor satellitibus circâ solem cœli centrum revolvitur in trajectoryâ quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis a tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter et Jovem positâ, maxima verò, sole inter Jovem et tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantia solis a terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio

instantanea non est, sed successiva, et per orbis magni diametrum sensibili aliquo tempore diffundatur, necesse est ut satellitis eclipsis, quæ contingit dum Jovis umbram subit, tardiùs a nobis videatur in majori illâ Jovis distantia, citiùs in minori, atquè ita rem se habere Roemerius alique deindè plures astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit Clariss. Maraldus in comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea Magno Casino visum fuerat. Sed Clarissimus Granjean ejus argumentis respondet in comm. Paris. 1732. horum dissertationes vide sis.

<sup>(x)</sup> \* Quasi magis attracti. Alia egregia experimenta vide in Newtoni optica initio lib. 3. et quæst. 29.

<sup>(z)</sup> \* Fit igitur refraction et reflexio. Vide

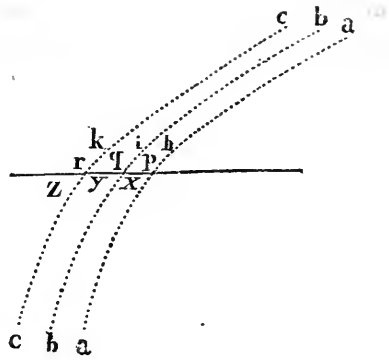
diorum, factam partim in aëre antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis  $c k z c$ ,  $b i y b$ ,



Prop. 8. et 9. Partis 3æ. Lib. Optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua,  $A a b B$ ,  $B b c C$ , planis parallelis terminata, et quorum talis sit attractionis lex ut ultrà distantiam  $p R$  a medio alterutro evanescat ejus medii attractio. Itaque centro  $p$  et radio  $p R$  (fig. 1.) describatur circulus vel potius sphaera  $R Z V X$  quæ planum  $B b$  non attingat, corpus  $p$  versus omnia hujus sphaeræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ  $G C$ , secundum quam moveri supponitur. Si in eadem rectâ  $G C$ , capiatur punctum  $C$ , a plano  $B b$  remotum distantia  $C V = p R$ , sitque vis attractiva versùs medium  $B b c C$ , major vi attractivâ medii  $A a b B$ , in eo ipso loco  $C$  corpus a rectâ viâ  $G C$  deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat ( $2^\circ$ ) corpus ex  $C$  in  $e$ , per curvam  $C e$ , et ductâ  $H M$  ad plana  $A a$ ,  $B b$  perpendiculari, ac per punctum  $e$ , rectâ  $e T$ , quæ curvam  $C e$ , tangat in  $e$ , et perpendiculari  $H M$  occurrat in  $T$ , erit angulus  $e T C$  minor angulo incidentiæ  $G H M$ ; nam cum segmentum  $k V L$ , in hemisphærio  $X V Z$  magis trahat versùs planum  $B b$ , quam segmentum ipsi æquale in hemisphærio  $X R Z$ , (ex hyp.) versùs planum  $A a$ , manifestum est curvam deorsum inflecti, ideòque tangentem  $e T$  a radio incidente  $G C$ , versùs superiora  $M$  recedere. Similiter ubi corpusculum  $C$  est in  $f$  ( $3^\circ$ ), intrâ medium  $B b c C$ , magis trahitur versùs planum  $C c$ , ab hemisphærio  $X V Z$ , quam retrahitur versùs planum  $B b$ , ab altero hemisphærio  $X R Z$ , cujus segmentum  $k R L$ , minus trahit, quam æquale segmentum in hemisphærio  $X V Z$ ; quare angulus  $H t f$ , quem tangens  $f t$  cum perpendiculari  $H M$  efficit, adhuc minor est quam angulus  $H T e$  ( $2^\circ$ ). Sed cum tandem corpusculum  $C$  pervenit in  $g$  ( $4^\circ$ ), locum a plano  $B b$  remotum distantia maximâ  $g R = p R$ , tum

corpus  $p$ , æqualiter undique attractum (ex hypothesi) semitam non ampliùs mutat, sed rectâ movetur per  $g I$ , quæ curvam  $C e f g$  tangit in  $g$ , estque angulus  $N g I$ , quem  $g I$  cum  $g N$  ad  $B b$  perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo  $H t f$  ( $3^\circ$ ). Oppositum eveniet, si medium  $B b c C$ , minùs trahat quam medium  $A a b B$ , et refractione in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractione et reflexio non in puncto incidentiæ  $R$  ( $4^\circ$ ). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis a corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, itâ ut sinus incidentiæ et emergentiæ datam servant rationem. Satis enim liquet plana linearum  $G H I$  et  $G H R h$ , in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana  $A a$ ,  $B b$ , ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendicularare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsus radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quæque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis et refractionis lex et causa; quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus et descensus liquorum in tubis vacui causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accuratè deduxit. Nam juxtâ rec-

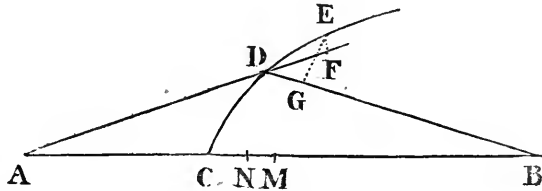
a h x a incidentibus ad r, q, p, et inter k et z, i et y, h et x, incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis et progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectoryas corporum trajectoryis radiorum persimiles solummodo determinans.



## PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

*Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione ; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit : determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum..*

Sit A locus a quo corpuscula divergunt ; B locus in quem convergere debent ; CDE curva linea quæ circa axem A B revoluta describat superficiem

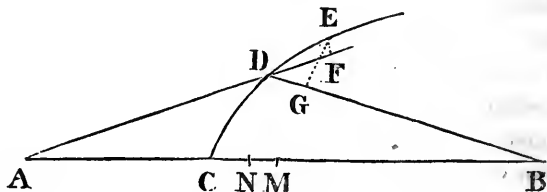


quæsitam ; D, E curvæ illius puncta duo quævis ; et E F, E G perpendicula in corporis vias A D, D B demissa. Accedat punctum D ad punctum E ; et lineæ D F, quâ A D augetur, ad lineam D G, quâ D B

tam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut postea motus corporum eorumque leges et causas accuratius investigare et cognoscere possimus. Caterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque causas inquisierunt philosophi ac mathematici celeberrimi, Cartesius cap. 2<sup>o</sup>. dioptrices per leges generales resolutionemque motuum, et supponendo luminis minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus me-

diis objici ; Leibnitzius in Actis Eruditorum Lipsiensibus an. 1682. pag. 185. hanc factâ hypothesei, quod lumen a puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat antea Fermatius ; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, et Joannes Bernoullius in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibriumi fundamento eam ingeniosissimè deduxit,

diminuitur, (<sup>γ</sup>) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ A D, ad decrementum lineæ D B; et propterea si in axe A B sumatur ubivis punctum C, per quod curva C D E transire debet, et capiatur ipsius A C incrementum C M ad ipsius B C decrementum C N in datâ illâ ratione, centrisque A, B, et intervallis A M, B N describantur circuli duo se mutuo secantes in D; (<sup>α</sup>) punctum illud D tanget curvam quæsitam C D E, eandemque ubivis tangendo determinabit. Q. e. i.



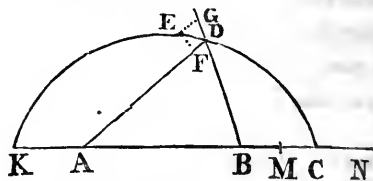
*Corol. 1.* Faciendo autem ut punctum A vel B, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, (<sup>β</sup>) habebuntur figuræ illæ omnes,

(<sup>γ</sup>) \* *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ D E pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ D F, D G sunt sinus angulorum D E F, D E G; sed angulus D E F est complementum ad rectum anguli E D F, seu A D C, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, et angulus D E G est complementum ad rectum anguli E D G, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergo lineæ D F ad lineam D G ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideoque data. Et hinc (per Cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ A D, ad decrementum totum finitum lineæ D B.

(<sup>α</sup>) \* *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa C M, et decrementa C N, puncta diversa lineæ C D E determinabuntur. Si verò centro B et radio quovis describatur circulus, curvam C E secans in E, et lineam A B in N, et inde convolutione superficiæ C E N, circâ axem C N solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam D B ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ E N egreditur, quod corpusculi directio D B, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

(<sup>β</sup>) \* *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Cartesius Geometriæ lib. 2<sup>o</sup>, pag. 50. et seq. dicit A 5, A 6, vel A 7, A 8, eas Newtonus hic vocat C M, C N, et de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Undè manifestum est, si punctum C, inter puncta A et B, et punctum N inter C et M, sita sint,

primam Cartesii ovalem Newtonianâ constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M, punctum N, inter C et A locetur, 2<sup>am</sup>, ovalem Cartesianam obtineri; si vero punctum B ad alteras partes puncti C migret ultrâ A, et punctum C sit inter A et N, atque M, 3<sup>am</sup>, Cartesii ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, et A, 4<sup>am</sup>, ovalem Cartesii delineari. Porro, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incident vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendicularum, quod circulus centro B vel A, et radio B N, vel A M, descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ C D E, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facile patet, atque hæc sunt figuræ quibus Cartesius cap. 8<sup>o</sup>, dioptrices usus est.



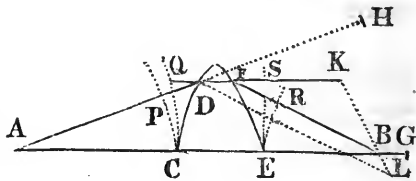
Eadem est demonstratio, si superficies C D E incidentes radios reflectit, quo casu fit C N = C M, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (per Prop. 96.) et curva C D E erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum C inter A et B situm; ellipsis, si extrâ positum sit; Parabola, si ellipseos focus B in infinitum



## PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

*Iisdem positis, et circa axem A B descriptâ superficie quâcunque attractivâ C D, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent : invenire superficiem secundam attractivam E F, quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat.*

Juncta A B secet superficiem primam in C et secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, <sup>(d)</sup> et sinu emergentiæ e superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N : producat A B ad G, ut sit B G ad C E ut M — N ad N; tum A D ad H, ut sit A H æqualis A G; tum etiam D F ad K, ut sit D K ad D H ut N ad M. Junge K B, et centro D intervallo D H describe circum- lum occurrentem K B productæ in L, ipsique D L parallelam age B F : et punctum F tanget lineam E F, quæ circa axem A B revoluta describet superficiem quæsitam. Q. e. f.



Nam concipe lineas C P, C Q ipsis A D, D F respectivè, et lineas E R, E S ipsis F B, F D ubique perpendiculares esse, <sup>(e)</sup> ideoque Q S ipsi C E semper æqualem; et erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) P D ad Q D ut M ad N, <sup>(f)</sup> ideoque ut D L ad D K <sup>(g)</sup> vel F B ad F K; <sup>(h)</sup> et divisim ut D L — F B seu P H — P D — F B ad F D seu F Q — Q D; et compositè ut P H — F B ad F Q, id est <sup>(i)</sup> (ob æquales P H

<sup>(d)</sup> \* Et sinu emergentiæ e superficie secunda, &c. Est enim sinus emergentiæ e superficie secundâ E F, ad sinum incidentiæ in eandem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam C D, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens A D refrangitur per D F, ob eandem rationem radius F D, incidens in D refrangetur per D A, et qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

<sup>(e)</sup> \* Ideoque Q S ipsi C E semper æqualem. Cum enim linea Q S, sit semper perpendicularis utrique lineæ C Q, E S (ex hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q et S semper parallelas, ut patet.

<sup>(f)</sup> \* Ideoque ut D L ad D K. Est enim (per constr.) D K ad D H, ut N ad M, et D L = D H, per const.

<sup>(g)</sup> \* Vel F B ad F K. Ob parallelas D L, F B (per constr.)

<sup>(h)</sup> \* Et divisim. Cum sit P D : Q D = D H : D K = F B : F K, erit divisim D H : D K, seu P D : Q D = D H — F B : D K — F K = P H — P D — F B : D F, seu Q F — Q D, et compositè P D : Q D = P H — P D + P D — F B, seu P H — F B : Q F — Q D + Q D, seu Q F = M : N.

<sup>(i)</sup> \* Ob æquales P H et C G. Nam (per constr.) A H = A G, et quoniam punctum A datum est, estque A P semper perpendicularis ad curvam C P, liquet eam curvam esse circum- lum cujus centrum A, undè A P = A C, et hinc P H = C G; et simili modo patet esse B R = B E, ob datum punctum B.

et C G, Q S et C E)  $C E + B G = F R$  ad  $C E - F S$ . Verùm (ob proportionales B G ad C E et M — N ad N) est etiam  $C E + B G$  ad  $C E$  ut M ad N: <sup>(k)</sup> ideoque divisim  $F R$  ad F S ut M ad N, et propterea per Corol. 2. Prop. XCVII., superficies E F cogit corpus, in ipsam secundum lineam D F incidens, pergere in linea F R ad locum B. Q. e. d.

*Scholium.* Eâdem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis et aquam inter se cludentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis et hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius et accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verùm tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quò minus optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis <sup>(l)</sup> imperitè collocabitur.

<sup>(k)</sup> \* *Ideoq̃ue divisim*, &c. Nam cum sit (ex demonstratis)  $M : N = C E + B G - F R : C E - F S = C E + B G : C E$ , erit divisim  $M : N = F R : F S$ .

<sup>(l)</sup> \* *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. I. Optices Newtonianæ, ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus lentis objectivæ telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæ-

qualiter colliguntur a vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente lente objectivâ, aucto foco lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ lentis figuram; hæc focorum multiplicitas nequitiam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ Prop. 7. et 8. Lib. I. Optices ab ipso explicantur, et quæ cum levi mutatione in usum communissimum veniære.

## FINIS TOMI PRIM.





# INDEX PROPOSITIONUM

## LIBRI PRIMI.

### AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS.

|                                             | Pag.  |                                               | Pag. |
|---------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------|------|
| <b>LEX I.</b>                               |       | tra eorundem circulorum tendere, et esse      |      |
| Corpus omne perseverat in statu suo quies-  |       | inter se ut sunt arcuum simul descripto-      |      |
| cendi vel movendi uniformiter in direc-     |       | rum quadrata applicata ad circulorum          |      |
| tum, nisi quatenus a viribus impressis      |       | radios.....                                   | 71   |
| cogitur statum illum mutare.....            | 15    |                                               |      |
| <b>LEX II.</b>                              |       | <b>PROP. V. PROBL. I.</b>                     |      |
| Mutatio motus proportionalis est vi motrici |       | Datâ quibuscunque in locis velocitate quâ     |      |
| impressæ et fit secundum lineam rectam      |       | corpus figuram datam viribus ad com-          |      |
| quâ vis illa imprimitur.....                | ibid. | mune aliquod centrum tendentibus descri-      |      |
|                                             |       | bit, centrum illud invenire.....              | 78   |
| <b>LEX III.</b>                             |       | <b>PROP. VI. THEOR. V.</b>                    |      |
| Actioni contraria semper et æqualis est re- |       | Si corpus in spatio non resistente circa cen- |      |
| actio: sive corporum duorum actiones in     |       | trum immobile in orbe quocunque revol-        |      |
| se mutuò semper sunt æquales et in con-     |       | vatur et arcum quemvis jamjam nascente        |      |
| trarias partes diriguntur.....              | 16    | tempore quàm minimo describat, et sagi-       |      |
| <b>PROP. I. THEOR. I.</b>                   |       | ta arcus duci intelligatur quæ cordam         |      |
| Areae quas corpora in gyros acta radiis ad  |       | bisecet et producta transeat per centrum      |      |
| immobile centrum virium ductis, descri-     |       | virium: erit vis centripeta in medio arcus,   |      |
| bunt, et in planis immobilibus consistunt   |       | ut sagitta directè et tempus bis inversè...   | 79   |
| et sunt temporibus proportionales.....      | 65    | <b>PROP. VII. PROBL. II.</b>                  |      |
| <b>PROP. II. THEOR. II.</b>                 |       | Gyretur corpus in circumferentiâ circuli,     |      |
| Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ    |       | requiritur lex vis centripetæ tendentis       |      |
| curvâ in plano descriptâ et radio ducto ad  |       | ad punctum quodcunque datum.....              | 85   |
| punctum vel immobile vel motu rectili-      |       | <b>PROP. VIII. PROBL. III.</b>                |      |
| neo uniformiter progrediens, describit      |       | Moveatur corpus in semi-circulo P Q A:        |      |
| areas circa punctum illud temporibus        |       | ad hunc effectum requiritur lex vis cen-      |      |
| proportionales, urgeturque a vi centripetâ  |       | tripetæ tendentis ad punctum adeò lon-        |      |
| tendente ad idem punctum.....               | 68    | ginquum S, ut lineæ omnes P S, R S, ad        |      |
| <b>PROP. III. THEOR. III.</b>               |       | id ductæ, pro parallelis haberi possint....   | 86   |
| Corpus omne quod radio ad centrum cor-      |       | <b>PROP. IX. PROBL. IV.</b>                   |      |
| poris alterius utcumque moti ducto descri-  |       | Gyretur corpus in spirali P Q S secante       |      |
| bit areas circa centrum illud temporibus    |       | radios omnes S P, S Q, &c. in angulo          |      |
| proportionales, urgetur vi compositâ ex vi  |       | dato: requiritur lex vis centripetæ ten-      |      |
| centripetâ tendente ad corpus illud alte-   |       | dentis ad centrum spiralis.....               | 104  |
| rum et ex vi omni acceleratrice quâ cor-    |       | <b>PROP. X. PROBL. V.</b>                     |      |
| pus illud alterum urgetur.....              | 69    | Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex     |      |
| <b>PROP. IV. THEOR. IV.</b>                 |       | vis centripetæ tendentis ad centrum el-       |      |
| Corporum, quæ diversos circulos æquabili    |       | lipscos.....                                  | 105  |
| motu describunt, vires centripetas ad cen-  |       |                                               |      |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Pag.  |                                                                                                                                                                                                              | Pag. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>PROP. XI. PROBL. VI.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |       | <b>PROP. XXI. THEOR. XIII.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.....                                                                                                                                                                                                                 | 118   | Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget.....                                                                                        | 144  |
| <b>PROP. XII. PROBL. VII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       | <b>PROP. XXII. PROBL. XIV.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Moveatur corpus in hyperbolâ, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.....                                                                                                                                                                                                                    | 120   | Trajectoriam per data quinque puncta describere.....                                                                                                                                                         | 161  |
| <b>PROP. XIII. PROBL. VIII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | <b>PROP. XXIII. PROBL. XV.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.....                                                                                                                                                                                                     | 123   | Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, et rectam continget positione datam.....                                                                                                      | 163  |
| <b>PROP. XIV. THEOR. VI.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       | <b>PROP. XXIV. PROBL. XVI.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantie locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.....                              | 125   | Trajectoriam describere quæ per data tria puncta et rectas duas positione datas continget.....                                                                                                               | 166  |
| <b>PROP. XV. THEOR. VII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       | <b>PROP. XXV. PROBL. XVII.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquiquatâ majorum axium.....                                                                                                                                                                                                            | 126   | Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit et rectas tres continget positione datas.....                                                                                                     | 173  |
| <b>PROP. XVI. THEOR. VIII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                    |       | <b>PROP. XXVI. PROBL. XVIII.</b>                                                                                                                                                                             |      |
| Iisdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendicularum inverse et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè..... | ibid. | Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum et rectas quatuor positione datas continget.....                                                                                                     | 174  |
| <b>PROP. XVII. PROBL. IX.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       | <b>PROP. XXVII. PROBL. XIX.</b>                                                                                                                                                                              |      |
| Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum a centro, et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.....                                                      | 130   | Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.....                                                                                                                                    | 180  |
| <b>PROP. XVIII. PROBL. X.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       | <b>PROP. XXVIII. PROBL. XX.</b>                                                                                                                                                                              |      |
| Datis umbilico et axibus principalibus describere trajectorias ellipticas et hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data et rectas positione datas continget.....                                                                                                                                                | 136   | Trajectoriam specie et magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.....                                                                                      | 193  |
| <b>PROP. XIX. PROBL. XI.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       | <b>PROP. XXIX. PROBL. XXI.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, et rectas positione datas continget.....                                                                                                                                                                                | ibid. | Trajectoriam specie datam describere quæ a rectis quatuor positione datis in partes seabitur, ordine, specie, et proportionem datas.....                                                                     | 197  |
| <b>PROP. XX. PROBL. XII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       | <b>PROP. XXX. PROBL. XXII.</b>                                                                                                                                                                               |      |
| Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie datam describere quæ per data puncta transibit et rectas tanget positione datas.....                                                                                                                                                                            | 137   | Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum....                                                                                                                         | 200  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | <b>PROP. XXXI. PROBL. XXIII.</b>                                                                                                                                                                             |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum....                                                                                                                          | 209  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | <b>PROP. XXXII. PROBL. XXIV.</b>                                                                                                                                                                             |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantie locorum a centro, spatia definire quæ corpus rectâ cadendo datis temporibus describit.....                                        | 216  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | <b>PROP. XXXIII. THEOR. IX.</b>                                                                                                                                                                              |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |       | Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circumlum describentis, in subduplicatâ ratione quam A C distantia corporis |      |

|                                                                                                                                                                                                                                                           |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A habet ad figuræ semi-diametrum principalem $\frac{1}{2}$ A B.....                                                                                                                                  | 228   |
| <b>PROP. XXXIV. THEOR. X.</b>                                                                                                                                                                                                                             |       |
| Si figura B E D parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quâ corpus centro B dimidio intervalli sui B C circumum uniformiter describere potest.....                                                    | 230   |
| <b>PROP. XXXV. THEOR. XI.</b>                                                                                                                                                                                                                             |       |
| Iisdem positis, dico quod area figuræ D E S, radio indefinito S D descripta, æqualis sit aræ quam corpus, radio dimidiùm lateris recti figuræ D E S æquante, circa centrum S uniformiter gyrando eodem tempore describere potest.....                     | ibid. |
| <b>PROP. XXXVI. PROBL. XXV.</b>                                                                                                                                                                                                                           |       |
| Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.....                                                                                                                                                                                       | 233   |
| <b>PROP. XXXVII. PROBL. XXVI.</b>                                                                                                                                                                                                                         |       |
| Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.....                                                                                                                                                            | 234   |
| <b>PROP. XXXVIII. THEOR. XII.</b>                                                                                                                                                                                                                         |       |
| Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates et spacia descripta, sunt arcibus arcuumque sinibus rectis et sinibus versis respectivè proportionalia.....             | 235   |
| <b>PROP. XXXIX. PROBL. XXVII.</b>                                                                                                                                                                                                                         |       |
| Positâ cujusunque generis vi centripetâ, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: et contra.....       | 236   |
| <b>PROP. XL. THEOR. XIII.</b>                                                                                                                                                                                                                             |       |
| Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcumque, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales..... | 241   |
| <b>PROP. XLI. PROBL. XXVIII.</b>                                                                                                                                                                                                                          |       |
| Positâ cujusunque generis vi centripetâ et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectorye in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectorys inventis.....                                                       | 246   |
| <b>PROP. XLII. PROBL. XXIX.</b>                                                                                                                                                                                                                           |       |
| Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate secundum datam rectam egressi.....                                                                                                                                  | 256   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>PROP. XLIII. PROBL. XXX.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| Efficiendum est ut corpus in trajectoryâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit atque corpus aliud in eadem trajectoryâ quiescente.....                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 258   |
| <b>PROP. XLIV. THEOR. XIV.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       |
| Differentia virium quibus corpus in orbe quiescente et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.....                                                                                                                                                                                                                                                                  | 259   |
| <b>PROP. XLV. PROBL. XXXI.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       |
| Orbium qui sunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apsidum.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 267   |
| <b>PROP. XLVI. PROBL. XXXII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |       |
| Positâ cujusunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.....                                                                                                                                                                     | 273   |
| <b>PROP. XLVII. THEOR. XV.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       |
| Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantie corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolvantia descriptent ellipses, et revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo singulas eundi et redeundi periodos iisdem temporibus absolvent....                                                                                                                   | 279   |
| <b>PROP. XLVIII. THEOR. XVI.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |       |
| Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insinat, et more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semi-diametrum globi..... | 280   |
| <b>PROP. XLIX. THEOR. XVII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| Si rota globi concavo ad rectos angulos intrinsecus insinat et revolvendo progrediatur in circulo maximo, longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semi-diametrum globi.....                                                        | ibid. |
| <b>PROP. L. PROBL. XXXIII.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |       |
| Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 285   |

## PROP. LI. THEOR. XVIII.

Pag.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro et hæc solâ vi agente corpus T oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis Q R S: dico quod oscillationum utuncque inæqualium æqualia erunt tempora..... 288

## PROP. LII. PROBL. XXXIV.

Definire et velocitates pendulorum in locis singulis et tempora quibus oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur..... 290

## PROP. LIII. PROBL. XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent..... 295

## PROP. LIV. PROBL. XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent et ascendent..... 300

## PROP. LV. THEOR. XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, et a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela et æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream temporî proportionalem describet..... 302

## PROP. LVI. PROBL. XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectory quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versum plagam in superficie illâ datam egressum..... 304

## PROP. LVII. THEOR. XX.

Corpora duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuò figuras similes. 311

## PROP. LVIII. THEOR. XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi..... 312

## PROP. LIX. THEOR. XXII.

Corporum duorum S et P circa commune

gravitatis centrum C revolvendum, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyantis, et figuris quas corpora circum se mutuò describunt figuram similem et æqualem descriptis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S + P..... 315

## PROP. LX. THEOR. XXIII.

Si corpora duo S et P, viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum S..... ibid.

## PROP. LXI. THEOR. XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahentia, neque aliâs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: et virium trahentium eadem erit lex respectu distantie corporum a centro illo communi atque respectu distantie totius inter corpora... 316

## PROP. LXII. PROBL. XXXVIII.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus..... 317

## PROP. LXIII. PROBL. XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantie suæ reciproce proportionalibus se mutuò trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus..... ibid.

## PROP. LXIV. PROBL. XL.

Viribus quibus corpora se mutuò trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centrâ, requiruntur motus plurium corporum inter se..... 319

## PROP. LXV. THEOR. XXV.

Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorumdem centrâ, moveri posse inter se in ellipsis et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quamproximè..... 322

PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Pag.

Si corpora tria quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuò trahant; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et figuram ad formam ellipseos umbilicam in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitur, quàm si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitur..... 324

PROP. LXVII. THEOR. XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P T, commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem, quàm circa corpus intimum et maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest..... 352

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P et T, commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicam in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitur, quàm si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitur. 353

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. Si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente, et corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires..... 354

PROP. LXX. THEOR. XXX.

Si ad sphericæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur..... 357

PROP. LXXI. THEOR. XXXI.

Pag.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphericæ; vi reciprocè proportionali quadrato distantie suæ ab eodem centro..... 358

PROP. LXXII. THEOR. XXXII.

Si ad sphericæ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphericæ densitas, tum ratio diametri sphericæ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis quæ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semi-diametro sphericæ..... 360

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII.

Si ad sphericæ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphericam constitutum attrahitur vi proportionali distantie suæ ab ipsius centro. 361

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphericam constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantie suæ ab ipsius centro..... ibid.

PROP. LXXV. THEOR. XXXV.

Si ad sphericæ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis, dico quod sphericæ quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantie centrorum..... 362

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI.

Si sphericæ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem et vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similes; et vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantie corporis attracti: dico quod vis tota, quæ hujusmodi sphericæ una attrahit aliam sit reciprocè proportionalis quadrato distantie centrorum..... 364

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII.

Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quæ sphericæ duæ se mutuò trahant, est ut distantia inter centra sphaerarum..... 366

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Si sphericæ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares et

- inæquabiles, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similes; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuò trahunt, sit proportionalis distantiae inter centra sphaerarum..... 568
- PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.**  
Si superficies ad latitudinem infinitè dimi-  
nutam jamjam evanescens  $E F f e$ , con-  
volutione sui circa axem  $P S$ , describat  
solidum sphaericum concavo-convexum,  
ad cujus particulas singulas æquales ten-  
dant æquales vires centripetæ: dico quod  
vis, quâ solidum illud trahit corpusculum  
sistum in  $P$ , est  $n$  ratione compositâ  
ex ratione solidi  $D E q \times F f$ , et ratione  
vis quâ particula data in loco  $F f$  traheret  
idem corpusculum..... 569
- PROP. LXXX. THEOR. XL.**  
Si ad sphaeræ alicujus  $A B E$ , centro  $S$   
descriptæ, particulas singulas æquales ten-  
dant æquales vires centripetæ; et ad spæ-  
ræ axem  $AB$ , in quo corpusculum aliquod  
 $B$  locatur, erigantur de punctis singulis  $D$   
perpendicularia  $D E$  sphaeræ occurrentia in  
 $E$ , et in ipsis capiuntur longitudines  $DN$ ,  
quæ sint ut quantitas  $\frac{D E q \times P S}{P E}$  et  
vis, quam sphaeræ particula sita in axe ad  
distantiam  $P E$  exercet in corpusculum  
 $P$  trahitur versus sphaeram, est ut area  
 $ANB$  comprehensa sub axe sphaeræ  $AB$ ,  
et lineâ curvâ  $ANB$ , quam punctum  $N$   
perpetuò tangit..... 572
- PROP. LXXXI. PROBL. XLI.**  
Stantibus jam positâ, mesuranda est area  
 $ANB$ ..... 575
- PROP. LXXXII. THEOR. XLI.**  
In sphaerâ centro  $S$ , intervallo  $SA$  descrip-  
ta, si capiuntur  $S I, S A, S P$ , continuè  
proportionales: dico quod corpusculi intra  
sphaeram, in loco quovis  $I$ , attractio est  
ad attractionem ipsius extra sphaeram, in  
loco  $P$ , in ratione compositâ ex subduplicatâ  
ratione distantiarum a centro  $I S$ ,  
 $P S$ , et subduplicatâ ratione virium cen-  
tripetarum, in locis illis  $P$  et  $I$ , ad cen-  
trum tendentium..... 582
- PROP. LXXXIII. PROBL. XLII.**  
Invenire vim quâ corpusculum in centro  
sphaeræ locatum ad ejus segmentum  
quodcunque attrahitur..... 585
- PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII.**  
Invenire vim quâ corpusculum extra cen-  
trum sphaeræ in axe segmenti cujusvis  
locatum, attrahitur ab eodem segmento.. 586
- PROP. LXXXV. THEOR. XLII.**  
Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum  
est, attractio longè fortior sit, quàm cùm  
vel minimo intervallo separantur ab invi-  
cem: vires particularum trahentis, in re-  
cessu corporis attracti, decrescunt in ra-  
tione plusquam duplicatâ distantiarum  
a particulis..... 588
- PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII.**  
Si particularum, ex quibus corpus attrac-  
tivum componitur, vires in recessu cor-  
poris attracti decrescunt in triplicatâ vel  
plusquam triplicatâ ratione distantiarum  
a particulis, attractio longè fortior erit in  
contactu, quàm cùm trahens et attractum  
intervallo vel minimo separantur ab invi-  
cem..... ibid.
- PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV.**  
Si corpora duo sibi invicem similia, et ex  
materiâ æqualiter attractivâ constantia,  
seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis  
proportionalia et ad se similiter posita:  
attractiones acceleratrices corpusculorum  
in corpora tota, erunt ut attractiones ac-  
celeratrices corpusculorum in eorum par-  
ticulas totis proportionales, et in totis si-  
militer positas..... 589
- PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV.**  
Si particularum æqualium corporis ejus-  
cunque vires attractivæ sint ut distantiae  
locorum a particulis: vis corporis totius  
tendit ad ipsius centrum gravitatis, et  
eadem erit cum vi globi ex materiâ con-  
simili et æquali constantis et centrum ha-  
bentis in ejus centro gravitatis..... 591
- PROP. LXXXIX. THEOR. LXVI.**  
Si corpora sint plura ex particulis æquali-  
bus constantia, quarum vires sunt ut dis-  
tantiæ locorum a singulis: vis ex omnium  
viribus composita, quâ corpusculum quod-  
cunque trahitur, tendet ad trahentium  
commune centrum gravitatis; et eadem  
erit ac si trahentia illa, servato gravitatis  
centro communi, coirent et in globum  
formarentur..... 592
- PROP. XC. PROBL. XLIV.**  
Si ad singula circuli cujuscunque puncta  
tendant vires æquales centripetæ, crescen-  
tes vel decrescentes in quacunque distan-  
tiarum ratione: invenire vim quâ cor-  
pusculum attrahitur ubivis positum in  
rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus  
perpendiculariter insistit..... 593
- PROP. XCI. PROBL. XLV.**  
Invenire attractionem corpusculi siti in axe  
solidi rotundi, ad cujus puncta singula  
tendant vires æquales centripetæ in quâ-  
cunque distantiarum ratione decrescentes. 595

|                                                                                                                   | Pag. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| PROP. XCII. PROBL. XLVI.                                                                                          |      |
| Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium..... | 402  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCIII. THEOR. XLVII.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
| Si solidum ex unâ parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquàm quadraticæ, et vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, et index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.. | 403 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCIV. THEOR. XLVIII.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
| Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, et corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ..... | 412 |

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCV. THEOR. XLIX.                                                                                                                              |     |
| Iisdem positis, dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ..... | 414 |

|                                                                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCVI. THEOR. L.                                                                                                                                                                                  |     |
| Iisdem positis, et quod motus ante incidentiam velocior sit quàm postea, dico quòd corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, et angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ..... | 415 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCVII. PROBL. XLVII.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
| Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerare possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum..... | 419 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| PROP. XCVIII. PROBL. XLVIII.                                                                                                                                                                                                                                               |     |
| Iisdem positis, et circa axem A B descriptâ superficie quacunque attractivâ C D, regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato A exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam E F quæ corpora illa ad locum datum B convergere faciat..... | 422 |













QA            Newton, (Sir) Isaac  
803            Philosophiae naturalis  
A2            principia mathematica  
1822  
v.1

Physical &  
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE  
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

---

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

---

